本课程分三个部分:

一、概率论：第1章—第6章

二、数理统计：第7章—第9章

三、随机过程：第10章—第12章

概率论研究对象：随机现象

概率(几率、或然率) ： 随机事件出现的可能性的量度

probability

概率发展简史

16世纪意大利学者开始研究掷骰子等赌博中的一些问题；

17世纪中叶，法国数学家B. 帕斯卡、荷兰数学家C. 惠更斯 基于排列组合的方法，研究了较复杂 的赌博问题， 解决了 “ 合理分配赌注问题” （即得分问题）.

而概率论的飞速发展则在17世纪微积分学说建立以后.

1933年前苏联数学家柯莫哥洛夫在他的《概率论基本概念》一书中首次提出概率的公理化定义。

数理统计研究怎样去有效地收集、整理和分析带有随机性的数据，以对所考察的问题作出推断或预测，直至为采取一定的决策和行动提供依据和建议.

概率论是数理统计学的基础，数理统计学是概率论的一种应用.

概率统计的应用举例：

1. 股市行情
2. 天气预报
3. 国民经济统计
4. 系统可靠性
5. 统计物理

• • • • • •

第一章　随机事件及其概率

确定性现象：在一定条件下,某种结果是否发生,事先完全可以预言;

如：向空中抛物体会向下落;

随机现象 ：

- 每次试验后出现的结果有多个可能
- 每次试验前不能预言出现什么结果

如：明天早上是否下雨;
甲乙两支足球队比赛，哪一个队将胜
明天的股市行情

§1.1 随机事件与样本空间

基本术语

试验：各种各样的科学试验或对某一事物的某种特性的观察。

随机试验：有如下特点的试验（用E表示）：

- 可在相同的条件下重复进行
- 试验的可能结果不止一个，但能明确所有可能的结果
- 试验前不能预知出现哪种结果

样本空间：随机试验E所有可能的结果组成的集合，记为Ω或者S

样本点(基本事件)：一次随机试验的直接结果；常记为ω；是样本空间的元素

随机事件 ：是在随机试验中可能发生也可能不发生的事情；样本空间的子集，常记为 $A\,,B\,,\ldots$

必然事件：所有样本点所组成的事件，每次试验必定发生的事件

不可能事件：每次试验必定不发生的事情，不包含任何样本点的事件

例1： 给出一组随机试验及相应的样本空间

E_1：投一枚硬币，观察正面反面出现的情况

$\Omega_1 = \{\mathrm{H}, \mathrm{T}\}$

E_2：投一枚硬币3次，观察正面反面出现的情况

$$\Omega_2 = \{\mathrm{HHH}, \mathrm{HHT}, \mathrm{HTH}, \mathrm{THH}, \mathrm{HTT}, \mathrm{THT}, \mathrm{TTH}, \mathrm{TTT}\}$$

E_3：投一枚硬币3次，观察正面反面出现的次数

$\Omega_3 = \{0, 1, 2, 3\}$

E_4：投一颗骰子，观察向上一面出现的点数

$$\Omega_4 = \{1,2,3,4,5,6\}$$

E_5：观察电话总机每天9:00~10:00接到的电话次数

$$\Omega_5 = \{0,1,2,3,\cdots,N\} \longrightarrow \text{有限样本空间}$$

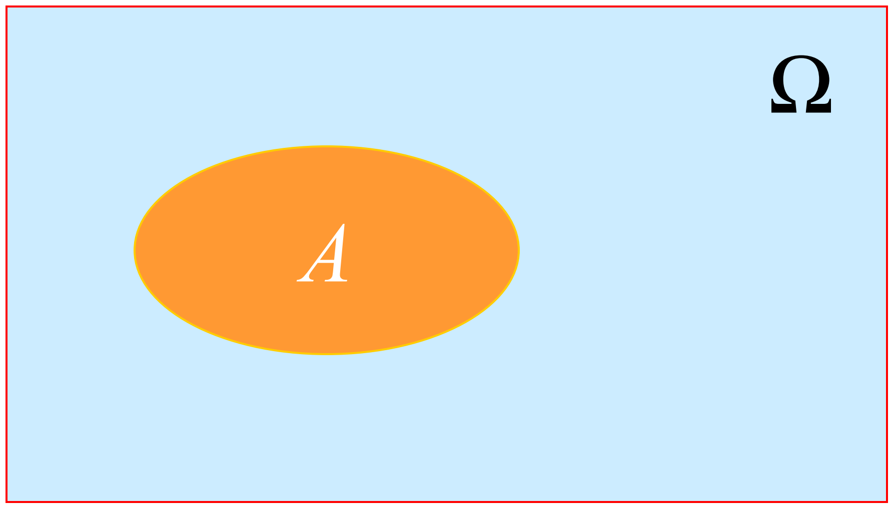
E_6：观察某地区每天的最高温度与最低温度

$$\Omega_6 = \{(x,y) \mid T_1 \le x \le y \le T_2\} \longrightarrow \text{无限样本空间}$$

其中T_1, T_2分别是该地区的最低温度与最高温度

随机事件的关系和运算

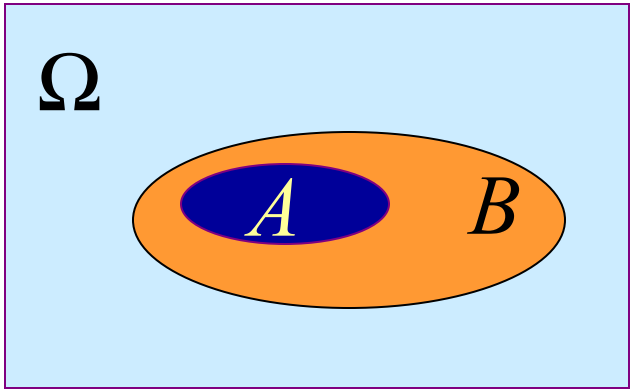
Venn图



随机事件的关系和运算雷同于集合的关系和运算

- $A \subset B$ —— A 包含于B

组成 A 的样本点也是组成 B 的样本点

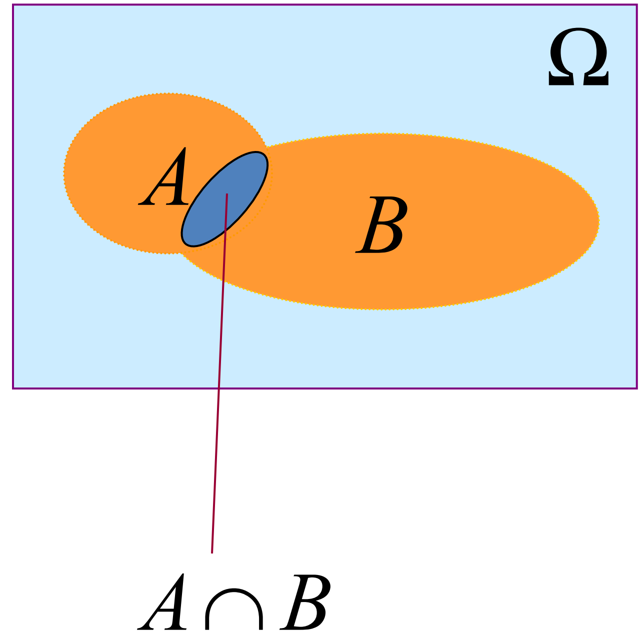


事件 A 发生必导致事件 B 发生

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B \text{ 且 } B \subset A$$

- $A \cap B$ 或 AB——事件A 与事件B 的积事件

由同时属于 A 与B 的样本点所组成的事件



$A \cap B$ 发生

事件 A与事件B 同时发生

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件 —— $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$

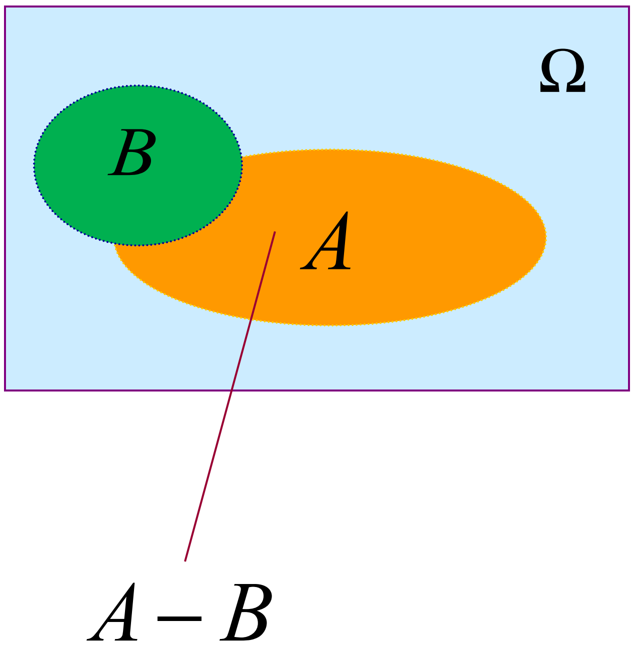
$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的积事件 —— $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$

- $A-B$ 差事件

由属于 A 但不属于 B 的样本点所组成的事件

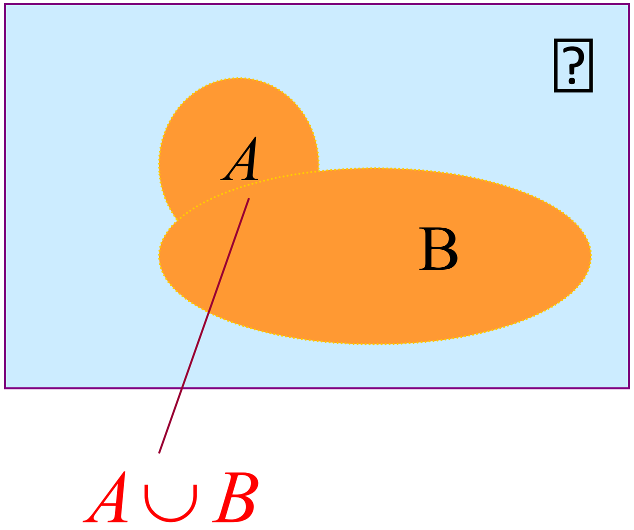
$A-B$ 发生

事件 A 发生，但事件 B 不发生



- $A \cup B$ 或 $A+B$ ——事件A 与事件B 的和事件

由组成 A 与组成B 的所有的样本点所组成的事件



$A \cup B$ 发生

事件 A与事件B 至少有一个发生

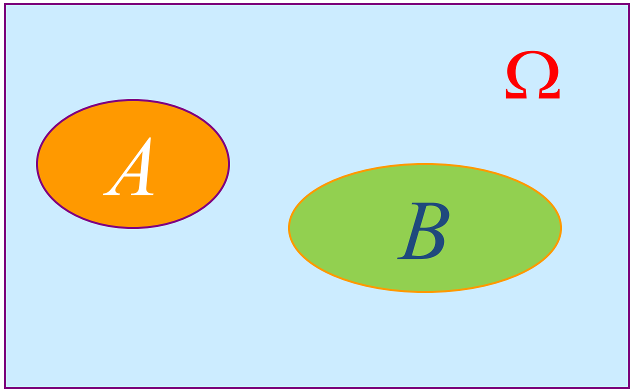
$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件 —— $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$

$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的和事件 —— $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

- 事件A 与事件B 互斥(互不相容)

$\Leftrightarrow AB=\varnothing$

$\Leftrightarrow A$、 B不可能同时发生



$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容

$$\Leftrightarrow A_i A_j=\varnothing, i\neq j, i,j=1,2,\cdots,n$$

$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 两两互不相容

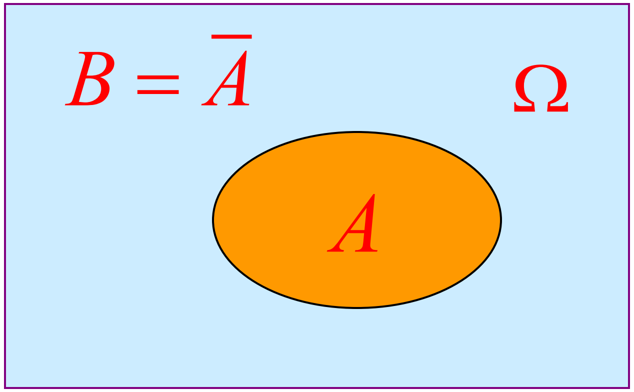
$$\Leftrightarrow A_i A_j=\varnothing, i\neq j, i,j=1,2,\cdots$$

● 事件A 与事件B 互相对立

$\Leftrightarrow AB=\varnothing$

$A\cup B=\Omega$

$\Leftrightarrow$ 每次试验 A、 B中必有一个也只有一个发生



称B 为A的对立事件(or逆事件)，记为$B=\overline{A}$

注意： “A 与B 互相对立”与 “A 与B 互斥”是两个不同的概念

运算律

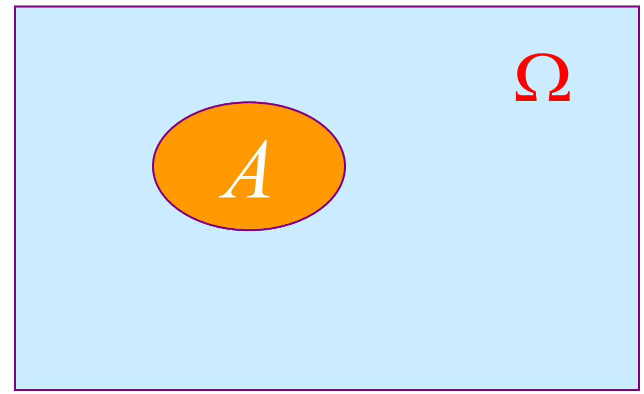
事件的关系与运算完全对应着集合的关系和运算，有着下列的运算律：

■ 吸收律 $A \cup \Omega = \Omega$

$A \cup \varnothing = A$

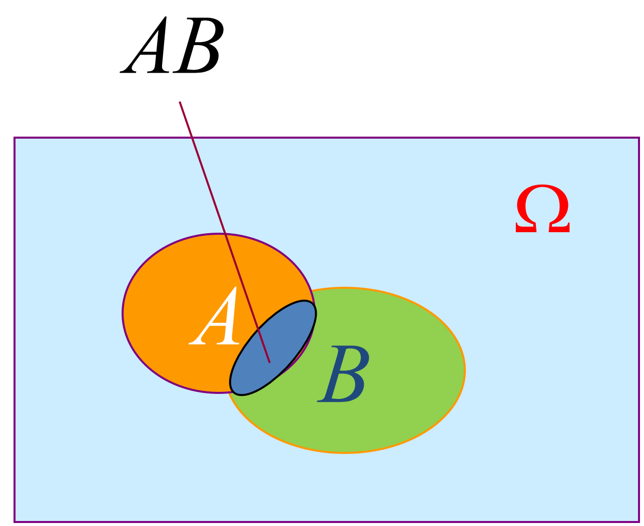
$A \cap \Omega = A$

$A \cap \varnothing = \varnothing$

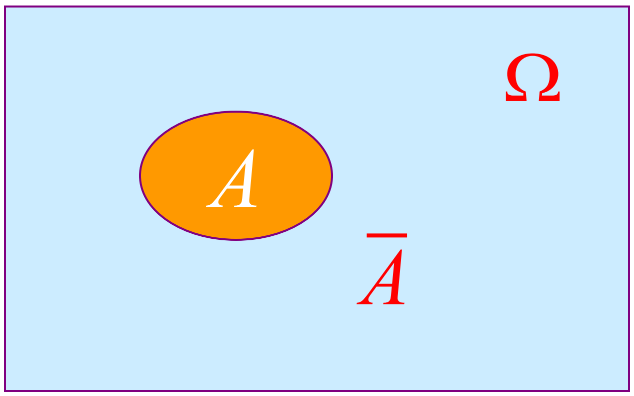


$A \cup (AB) = A$

$A \cap (A \cup B) = A$



■ 重余律 $\overline{\overline{A}} = A$

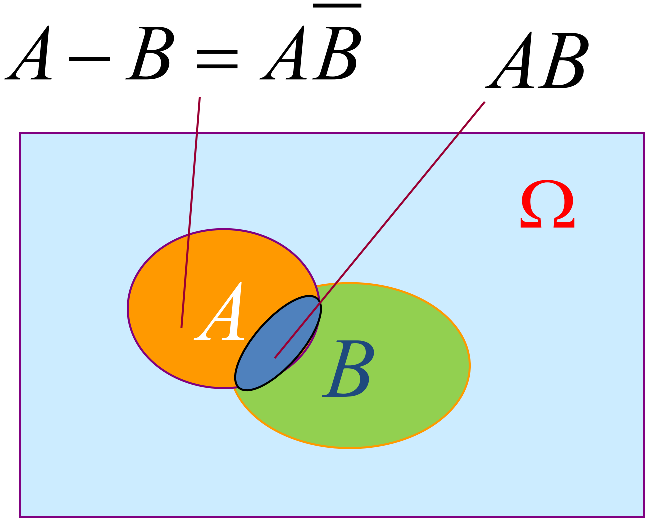


□ 幂等律 $A \cup A = A$

$A \cap A = A$

□ 差化积

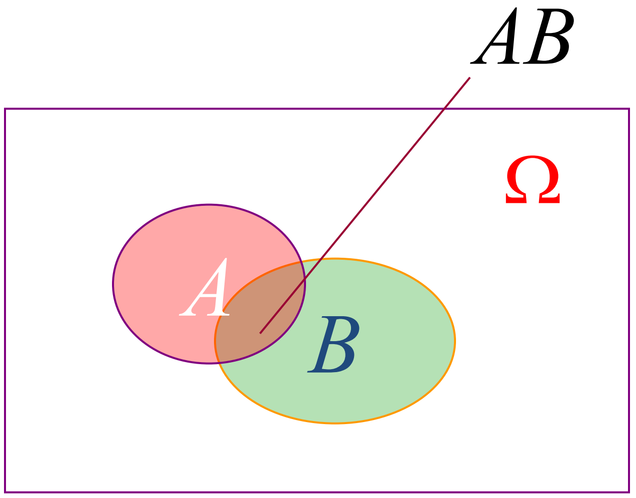
$$A - B = A\overline{B} = A - (AB)$$



□ 交换律

$$AB = BA$$

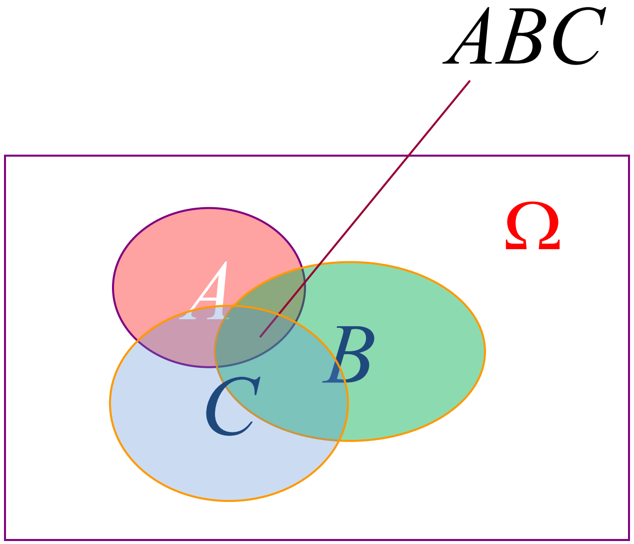
$$A \cup B = B \cup A$$



□ 结合律

$$(AB)C = A(BC)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$



□ 分配律

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$$

□ 反演律

$$\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B} \qquad \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

例2 化简事件 $\overline{(\overline{A}\,\overline{B}\cup C)\overline{AC}}$

解 原式$=\overline{\overline{A}\,\overline{B}\cup C}\cup AC$

$$=\overline{\overline{A}\,\overline{B}}\,\overline{C}\cup AC$$

$$=(A\cup B)\overline{C}\cup AC$$

$$=A\overline{C}\cup B\overline{C}\cup AC$$

$$=A(\overline{C}\cup C)\cup B\overline{C}$$

$$=A\Omega\cup B\overline{C}$$

$$=A\cup B\overline{C}$$

例3 利用事件关系和运算表达多个事件的关系

A, B, C 都不发生—— $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

$$= \overline{A \cup B \cup C}$$

A, B, C 不都发生—— $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

$$= \overline{ABC}$$