§1.2 概率的定义及其性质

- 古典定义
- 几何定义
- 统计定义

- 概率的公理化定义

古典概率模型

定义 设 E 是一随机试验，它具有下列特点：

- 基本事件的个数有限 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$
- 每个基本事件发生的可能性大小相同

$$P(e_1)=P(e_2)=\cdots=P(e_n)$$

则称 E 为 古典概型

例子：投掷一颗匀称的骰子，观察其出现的点数。易知，

$S=\{e_1,e_2,\cdots,e_6\}$ 其中e_i表示出现i点。

则出现奇数点的概率为$\frac{3}{6}$

即：等可能概型中概率的计算：

记$n = S$中所包含的基本事件的个数

记$k =$ 组成A的基本事件的个数

则 $P(A) = \frac{k}{n}$

古典概型的性质：

- 非负性：$\forall A \subset S,\ P(A) \geq 0$
- 规范性：$P(S) = 1$
- 有限可加性：$P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i)$

其中$A_1, A_2, \ldots A_m$为两两互斥事件。

推导性质：$P(A) + P(\overline{A}) = 1$

$$1 = P(S) = P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$$

例1.从1至9这九个号码中，随机的取4个号码，数码之和为奇数的概率

4个数当中必须有1个或3个奇数

$$p=\frac{C_5^1C_4^3+C_5^3C_4^1}{C_9^4}$$

例2 盒内装有5个红球，3个白球。从中任取两个，试求（1）取到两个红球的概率；（2）取到两个相同颜色球的概率。

解：设A=“取到两个红球”

B=“取到两个同颜色的球”

$$P(A)=\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{\frac{5\times 4}{2!}}{\frac{8\times 7}{2!}}=\frac{5}{14}$$

令C=“取到两个白球”，由于有

$$B = A + C \quad AC = \varnothing$$

故 $P(B) = P(A+C) = P(A) + P(C)$

$$= \frac{5}{14} + \frac{C_3^2}{C_8^2} = \frac{5}{14} + \frac{3}{28} = \frac{13}{28}$$

例3某校一年级新生共1000人,设每人的生日是一年中的任何一天的可能性相同,问至少有一人的生日是元旦这一天的概率是多少？(一年以365天计).

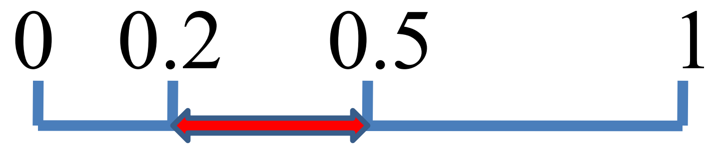
解：设A= “至少有一人的生日是元旦这一天” ，$\overline{A}$ = “则没有一人的生日是元旦这一天”

$$P(\overline{A}) = \frac{364^{1000}}{365^{1000}}$$

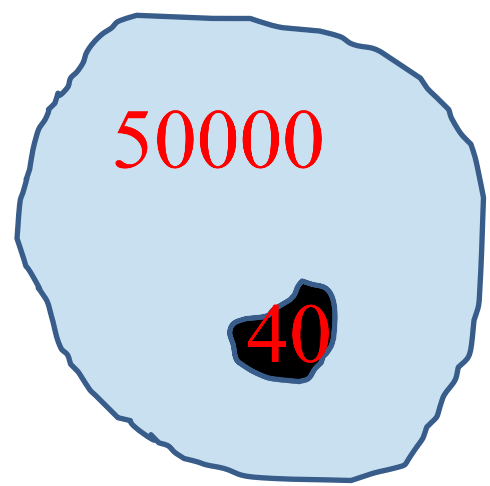
于是 $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{364^{1000}}{365^{1000}}$

几何概型

例1：在区间[0,1]上投针，则针落在[0.2, 0.5]的概率是多大？



例2：如果在一个50000平方公里的海域里有表面积达40平方公里的大陆架贮藏着石油，假如在这海域里随意选定一点钻探，问钻到石油的概率是多少？



几何概型定义：

设样本空间是一个有限区域S（如：线段，平面有界区域，空间有界区域等等。），做随机试验：向区域S内投一质点M，若质点M落入S内任何子区域A中的概率与区域A的度量成正比，而与A的位置和形状无关，则称此试验为几何型随机试验，简称几何概型

此时，样本点落入A内的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{的度量}}{S\text{的度量}}=\frac{L(A)}{L(S)}$$

几何概型的性质：

- 非负性：$\forall A \subset S,\ P(A) \geq 0$
- 规范性：$P(S) = 1$
- 有限可加性：$P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i)$

其中 $A_1, A_2, \cdots A_m$ 为两两互斥事件。

- 可列可加性：$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

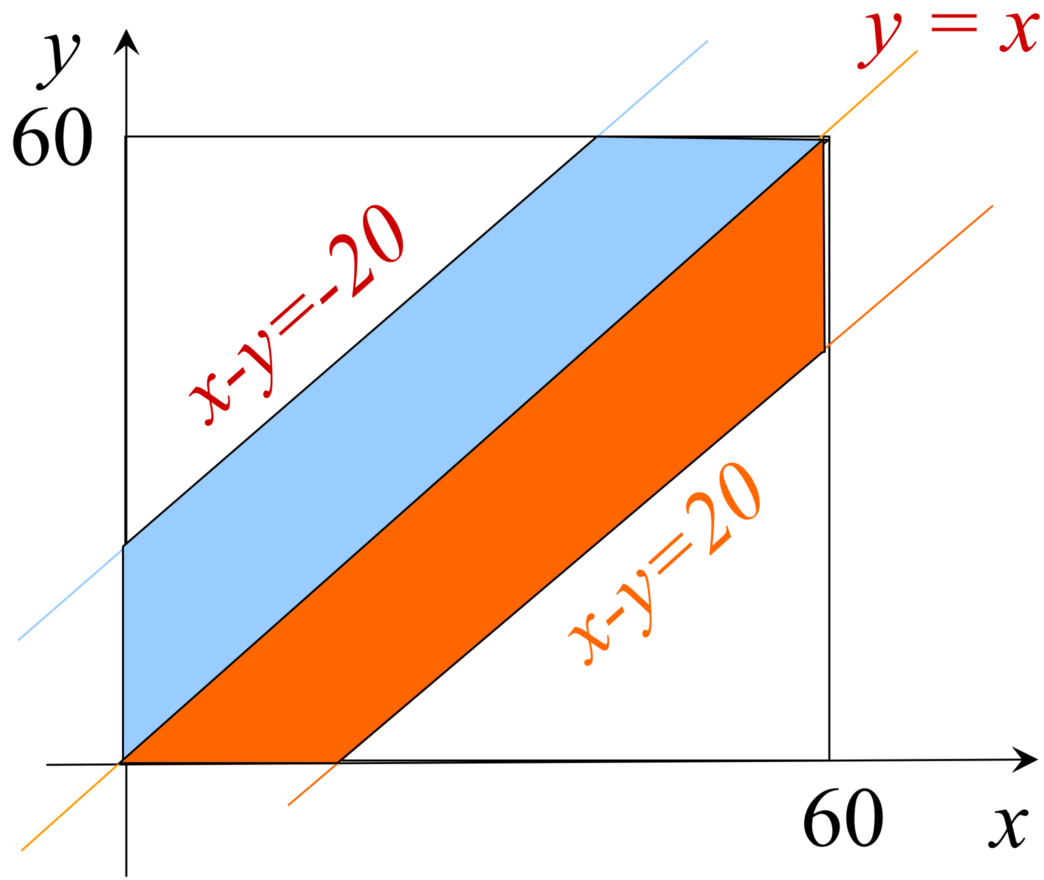
其中 $A_1, A_2, \cdots$ 为两两互斥事件。

例4 两人约定于8时至9时在某地会面。先到者等候20分钟，过时就离去，试求两人能见面的概率

解设两人 到达的时间分别为8时 x分、 8时y分，则：$0 \le x < 60$，$0 \le y < 60$

相遇条件：

$-20 < x-y < 20$



$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 \le x < 60, 0 \le y < 60\}$$

$$A = \{(x, y) \mid (x, y) \in \Omega,$$
$$0 \le y - x \le 20, 0 \le x - y \le 20\}$$

$$S_\Omega = 60^2$$

$$S_{\bar{A}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \times 40^2 \right)$$

$$P(A) = 1 - \frac{S_{\bar{A}}}{S_\Omega}$$

$$= \frac{60^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \times 40^2 \right)}{60^2}$$

$$= \frac{5}{9}$$