古典定义和几何定义的局限：等可能性

第一组试验	1000次	1点向上	100次	频率0.100
第二组试验	1000次	1点向上	98次	频率0.098
第三组试验	1000次	1点向上	101次	频率0.101
第四组试验	1000次	1点向上	99次	频率0.099
第五组试验	1000次	1点向上	102次	频率0.102

统计定义

定义 设在 n 次试验中，事件 A 发生了 n_A 次，则称

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

为事件 A 在这 n 次试验中发生的**频率**

$f_n(A)$ 总是在某一个数之间摆动，此数定义为**概率** $P(A)$

频率的性质

- $0 \le f_n(A) \le 1$ ———— 非负性
- $f_n(S) = 1$ ———— 规范性
- 事件 A, B 互斥，则

$$f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$$ ———— 可加性

可推广到有限个两两互斥事件的和事件

概率的公理化定义

概率的公理化理论由前苏联数学家柯尔莫哥洛夫(А.Н.Колмогоров)1933年建立.

设 $P(A)$ 是定义在试验E的全体事件所组成的集合F上的一个函数，如果$P(A)$满足以下三个条件：则称$P(A)$为事件 A 的概率。

- 非负性：$\forall A \subset \Omega,\ P(A) \geq 0$
- 规范性：$P(\Omega) = 1$
- 可列可加性：$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

其中 $A_1, A_2, \cdots$ 为两两互斥事件，

概率的性质

- $P(\varnothing) = 0$

证： $$1 = P(\varnothing + \Omega)$$
$$= P(\varnothing) + P(\Omega)$$
$$= P(\varnothing) + 1$$

故 $P(\varnothing) = 0$

- 有限可加性: 设 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 为两两互斥事件，

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

证： 由概率的可列可加性，知：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

取 $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \Phi$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + 0 + \cdots$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A) \quad \Rightarrow P(A) \le 1$

证：$1 = P(\Omega)$

$$= P(\overline{A} + A)$$

$$= P(\overline{A}) + P(A)$$

故 $P(\overline{A}) = 1 - P(A) \ge 0$

且 $P(A) \le 1$

- 若 $A \subset B$

  则 $P(B-A) = P(B) - P(A)$

  $P(A) \le P(B)$

  证：由 $A \subset B$ 知

  $B = A + (B-A)$ 且 $A \cap (B-A) = \Phi$

  故 $P(B) = P(A) + P(B-A)$

  $P(B-A) = P(B) - P(A)$

- 加法公式：对任意两个事件$A, B,$ 有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$P(A\cup B)\le P(A)+P(B)$$

证：因 $A\cup B=(A-AB)+(B-AB)+AB$

且 $A-AB$, $B-AB$, AB 两两互不相容

故 $P(A\cup B)=P(A-AB)+P(B-AB)+P(AB)$

$$=P(A)-P(AB)+P(B)-P(AB)+P(AB)$$

$$=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$\ge 0$$

故 $P(A\cup B)\le P(A)+P(B)$

推广：$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

$$- P(AB) - P(AC) - P(BC)$$

$$+ P(ABC)$$

一般：$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i A_j) +$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n}^{n} P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$$

例7 小王参加“智力大冲浪”游戏，他能答出第一类问题的概率为0.7，答出第二类问题的概率为0.2，两类问题都能答出的概率为0.1．求小王

(1) 答出第一类而答不出第二类问题的概率

(2) 两类问题中至少有一类能答出的概率

(3) 两类问题都答不出的概率

解 设事件A_i表示“能答出第 i 类问题”

i = 1,2 ，则

$$P(A_1)=0.7 \qquad P(A_2)=0.2$$

$$P(A_1A_2)=0.1$$

(1) $$P(A_1\overline{A_2}) = P(A_1) - P(A_1A_2)$$

$$= 0.7 - 0.1 = 0.6$$

(2) $$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2)$$

$$= 0.8$$

(3) $$P(\overline{A_1}\ \overline{A_2}) = P(\overline{A_1 \cup A_2})$$

$$= 0.2$$