§1.3 条件概率与乘法公式

引例 袋中有7只白球，3只红球；白球中有4只木球，3只塑料球；红球中有2只木球，1只塑料球.

$$\begin{cases} 7\text{白} \begin{cases} 4\text{木} \\ 3\text{塑} \end{cases} \\ 3\text{红} \begin{cases} 2\text{木} \\ 1\text{塑} \end{cases} \end{cases}$$

现从袋中任取1球，假设每个球被取到的可能性相同. 若已知取到的球是白球，问它是木球的概率是多少？

$$\begin{cases} 7\text{白}\begin{cases}4\text{木}\\ 3\text{塑}\end{cases}\\ 3\text{红}\begin{cases}2\text{木}\\ 1\text{塑}\end{cases}\end{cases}$$

设 A 表示任取一球，取得白球；
B 表示任取一球，取得木球

所求的概率称为在事件A 发生的条件下事件B 发生的条件概率。记为

$$P(B|A)$$

$$P(B|A)=\frac{4}{7}$$

$$\begin{cases} 7\text{白}(\mathrm{A})\begin{cases}4\text{木}\ (\mathrm{AB})\\ 3\text{塑}\end{cases}\\ 3\text{红}\begin{cases}2\text{木}\\ 1\text{塑}\end{cases}\end{cases}$$

$$=\frac{n_{AB}}{n_A}=\frac{n_{AB}/n}{n_A/n}$$

$$=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$P\left(B \mid A\right)=\frac{4}{7} = \frac{n_{AB}}{n_A} = \frac{n_{AB}/n_{\Omega}}{n_A/n_{\Omega}} = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

定义 设A、B为两事件, $P(A) > 0$, 则称 $\frac{P(AB)}{P(A)}$

为事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率，

记为 $P(B|A)$

条件概率也是概率，它符合概率的定义，具有概率的性质：

- ❑ 非负性 $P(B|A)\geq 0$
- ❑ 规范性 $P(\Omega|A)=1$
- ❑ 可列可加性 $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i \middle| A\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i|A)$

其他性质：

$$P(B_1\cup B_2 \mid A)=P(B_1 \mid A)+P(B_2 \mid A)-P(B_1B_2 \mid A)$$

$$P(\overline{B} \mid A)=1-P(B \mid A)$$

$$P(B_1-B_2 \mid A)=P(B_1 \mid A)-P(B_1B_2 \mid A)$$

乘法公式

将 $P(B \mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 变形， 即得

$$P(AB)=P(A)P(B|A) \quad (P(A)>0)$$

$$P(AB)=P(B)P(A|B) \quad (P(B)>0)$$

称为乘法公式

推广

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)\cdots P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

例1

已知某厂生产的灯泡能用到1000小时的概率为0.8，能用到1500小时的概率为0.4，求已用到1000小时的灯泡能用到1500小时的概率

解 令 A 灯泡能用到1000小时

B 灯泡能用到1500小时

所求概率为

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \underset{\uparrow \atop B \subset A}{=} \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{0.4}{0.8} = \frac{1}{2}$$

例2 一盒中装有5个产品，其中有3个一等品，2个二等品，从中不放回地取产品，每次1个，

$$\text{5个产品}\left\{\begin{array}{l}\text{3个一等}\\[2em]\text{2个二等}\end{array}\right.$$

求：（1）取两次，两次都取得一等品的概率

（2）取两次，第二次取得一等品的概率

（3）取两次，已知第二次取得一等品，求第一次取得的是二等品的概率

（4）取三次，第三次才取得一等品的概率

$$5\text{个产品}\begin{cases}3\text{个一等}\\ 2\text{个二等}\end{cases}$$

解 令 A_i 为第 i 次取到一等品

（1）取两次，两次都取得一等品的概率

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2 \mid A_1) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$$

（2）取两次，第二次取得一等品的概率

$$P(A_2)=P(\overline{A_1}A_2 \cup A_1A_2)=P(\overline{A_1}A_2)+P(A_1A_2)$$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{5}$$

（3）取两次，已知第二次取得一等品，求第一次取得的是二等品的概率

$$P\left(\overline{A_1}\,\middle|\,A_2\right)=\frac{P(\overline{A}_1A_2)}{P(A_2)}=\frac{P(A_2)-P(A_1A_2)}{P(A_2)}$$

$$=1-\frac{3/10}{3/5}=\frac{1}{2}$$

（4）取三次，第三次才取得一等品的概率

$$P(\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ A_3)=P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\,\middle|\,\overline{A_1}\right)P\left(A_3\,\middle|\,\overline{A_1}\,\overline{A_2}\right)$$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}=\frac{1}{10}$$

例3 某人外出旅游两天，需要知道两天的天气情况，据天气预报，第一天下雨的概率为0.6，第二天下雨的概率为0.3，两天都下雨的概率为0.1. 求 第一天下雨时，第二天不下雨的概率

解 设A_1, A_2分别表示第一天下雨与第二天下雨

$$P(\overline{A_2} \mid A_1) = \frac{P(A_1\overline{A}_2)}{P(A_1)} = \frac{P(A_1) - P(A_1A_2)}{P(A_1)}$$

$$= \frac{0.6 - 0.1}{0.6} = \frac{5}{6} > P(\overline{A}_2) = 0.7$$

例4 为了防止意外，矿井内同时装有两种报警设备 A 与 B，已知设备 A 单独使用时有效的概率为0.92，设备 B 单独使用时有效的概率为0.93，在设备 A 失效的条件下，设备B 有效的概率为0.85，求发生意外时至少有一个报警设备有效的概率。

设事件 A, B 分别表示设备A, B 有效

则已知 $P(A)=0.92$ $P(B)=0.93$

$$P(B \mid \overline{A})=0.85$$

求 $P(A \cup B)$

已知 $P(A)=0.92 \quad P(B)=0.93$

$$P(B \mid \overline{A})=0.85$$

求 $P(A \cup B)$

解 由 $P(B \mid \overline{A})=\dfrac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})}=\dfrac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$

即 $0.85=\dfrac{0.93-P(AB)}{0.08}$

$\longrightarrow$ $P(AB)=0.862$

故 $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$$=0.92+0.93-0.862=0.988$$

已知 $P(A)=0.92 \quad P(B)=0.93$

$$P\left(B \mid \overline{A}\right)=0.85$$

求 $P\left(A \cup B\right)$

解法二

$$P\left(\overline{A \cup B}\right)=P(\overline{A}\ \overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B} \mid \overline{A})$$

$$=P(\overline{A})\cdot\left[1-P(B \mid \overline{A})\right]$$

$$=0.08\cdot\left[1-0.85\right]=0.012$$

$$P(A \cup B)=0.988$$