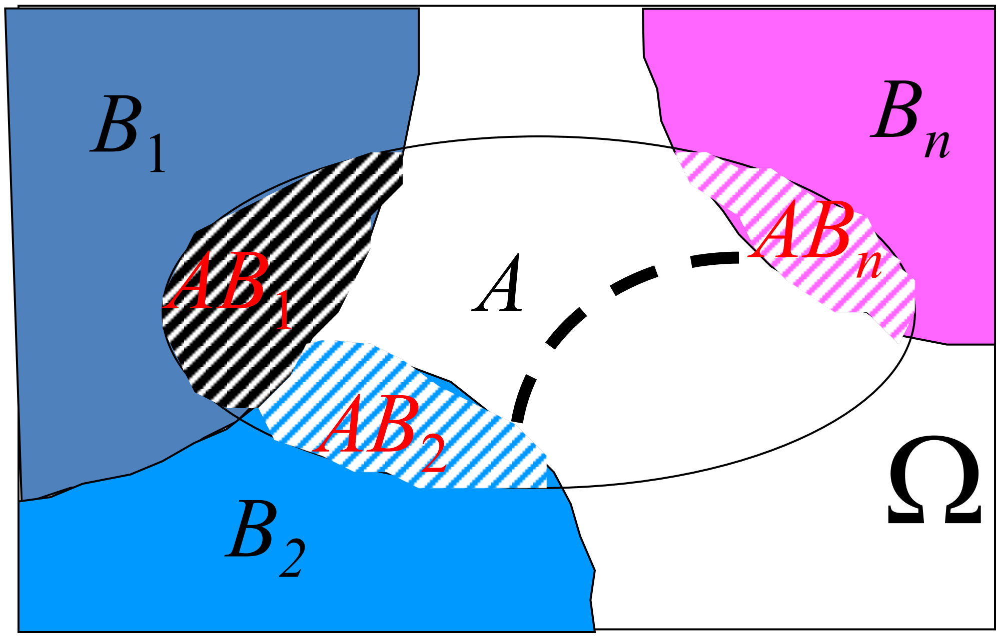
§ 1.4 全概率公式与Bayes 公式

全概率公式



$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$$

$$B_i B_j = \Phi$$

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} AB_i \qquad (AB_i)(AB_j) = \Phi$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(AB_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)$$

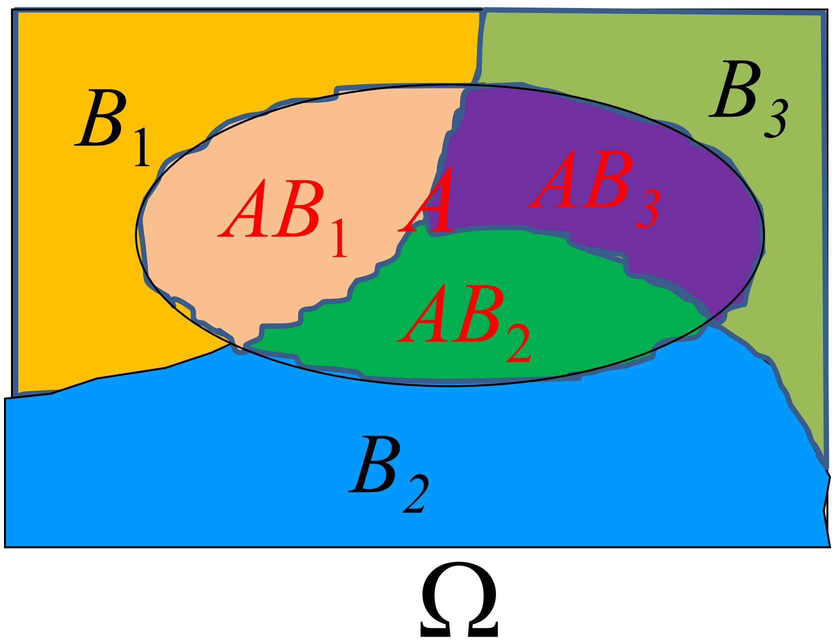
例1 某厂用三台机床生产了同样规格的一批产品,各台机床的产量分别占60%, 30%, 10%, 次品率依次为4%,3%,7%.现从这批产品中随机地取一件,试求取到次品的概率.

解：令A=“取得次品”，B_i = “取到第i台机床生产的产品”，i=1,2,3

则：$P(B_1)=\dfrac{60}{100}$,

$P(B_2)=\dfrac{30}{100}$,

$P(B_3)=\dfrac{10}{100}$



又：$P(A|B_1)=\dfrac{4}{100}$，$P(A|B_2)=\dfrac{3}{100}$，$P(A|B_3)=\dfrac{7}{100}$

由全概率公式 $P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)$

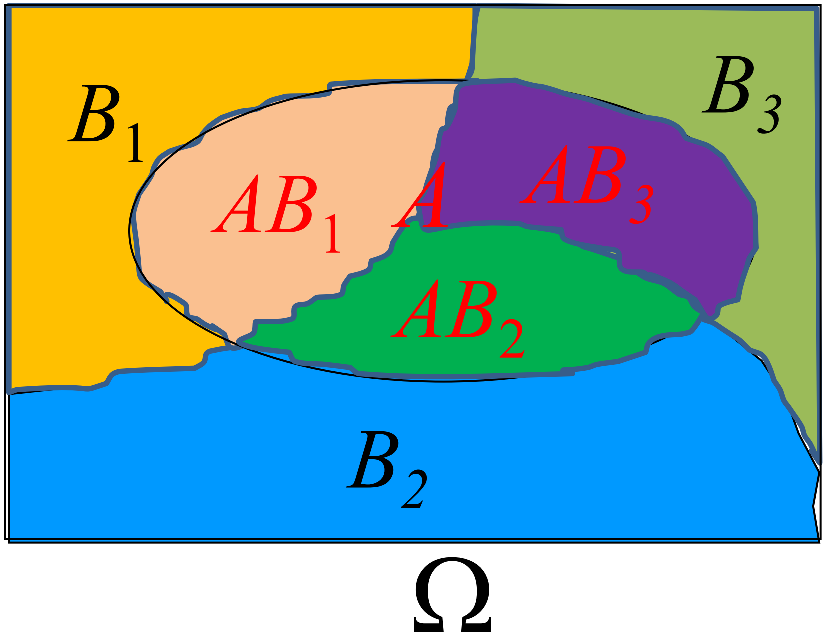
$$=\frac{60}{100}\times\frac{4}{100}+\frac{30}{100}\times\frac{3}{100}+\frac{10}{100}\times\frac{7}{100}=0.04$$

$$=P(AB_1)+P(AB_2)+P(AB_3)$$

事实上，全概率公式即：

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(AB_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)$$

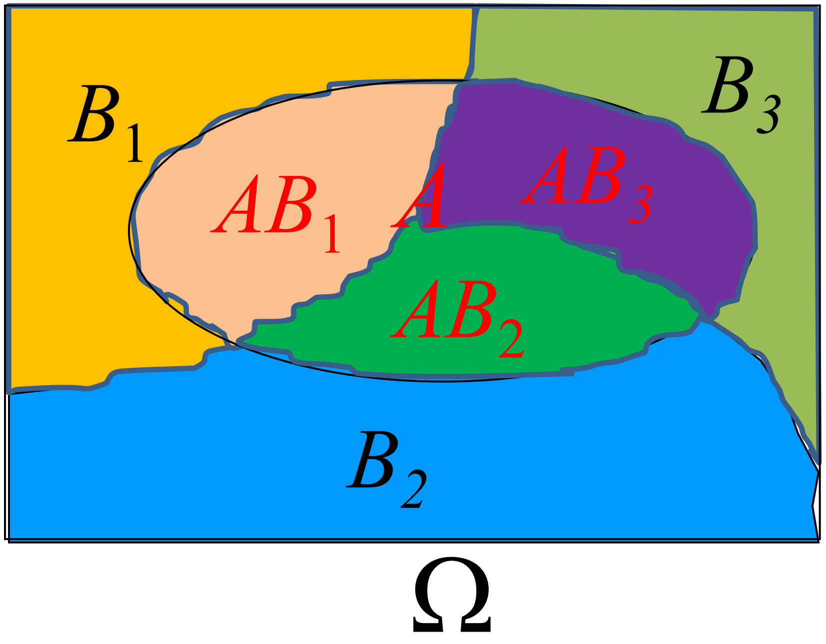


另外提出一个问题： $P(B_1 | A) = ?$

$$P(B_1 | A) = \frac{P(AB_1)}{P(A)}$$

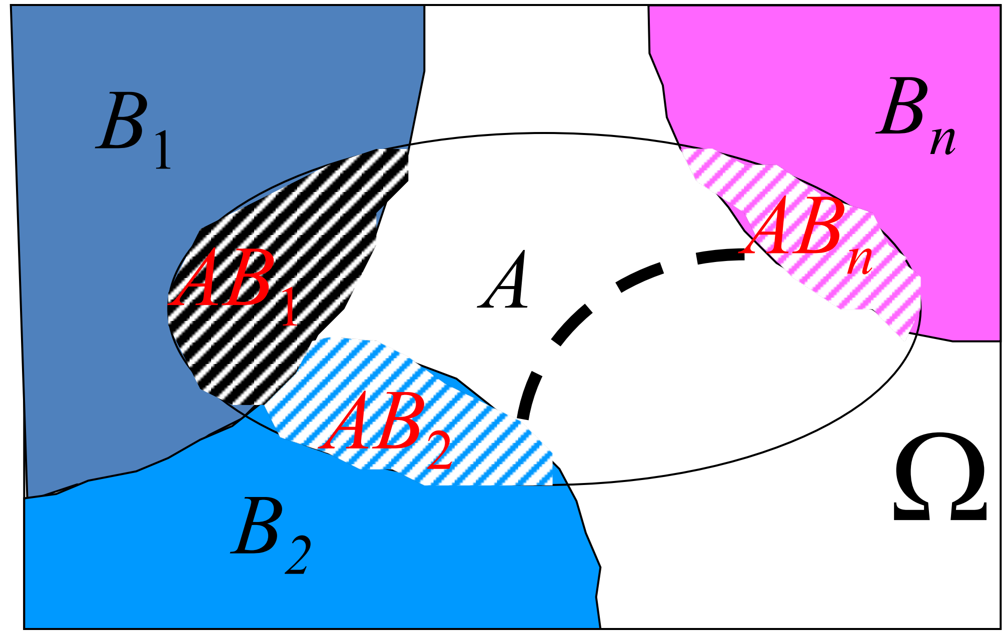
$$= \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(A|B_i)}$$

$$= \frac{\frac{60}{100} \times \frac{40}{100}}{0.04}$$



Bayes公式

一般地，



$$P(B_k \mid A) = \frac{P(AB_k)}{P(A)} = \frac{P(B_k)P(A \mid B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)}$$

例2 每100件产品为一批，已知每批产品中的次品数不超过4件，每批产品中有 i 件次品的概率为

i	0	1	2	3	4
P	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

B_0 0 0.1

B_1 1 0.2

B_2 2 0.4

B_3 3 0.2

B_4 4 0.1

100件

从一批产品中不放回地取10件进行检验，若发现有不合格产品，则认为这批产品不合格，否则就认为这批产品合格。求：

（1）一批产品通过检验的概率

$P(A)$

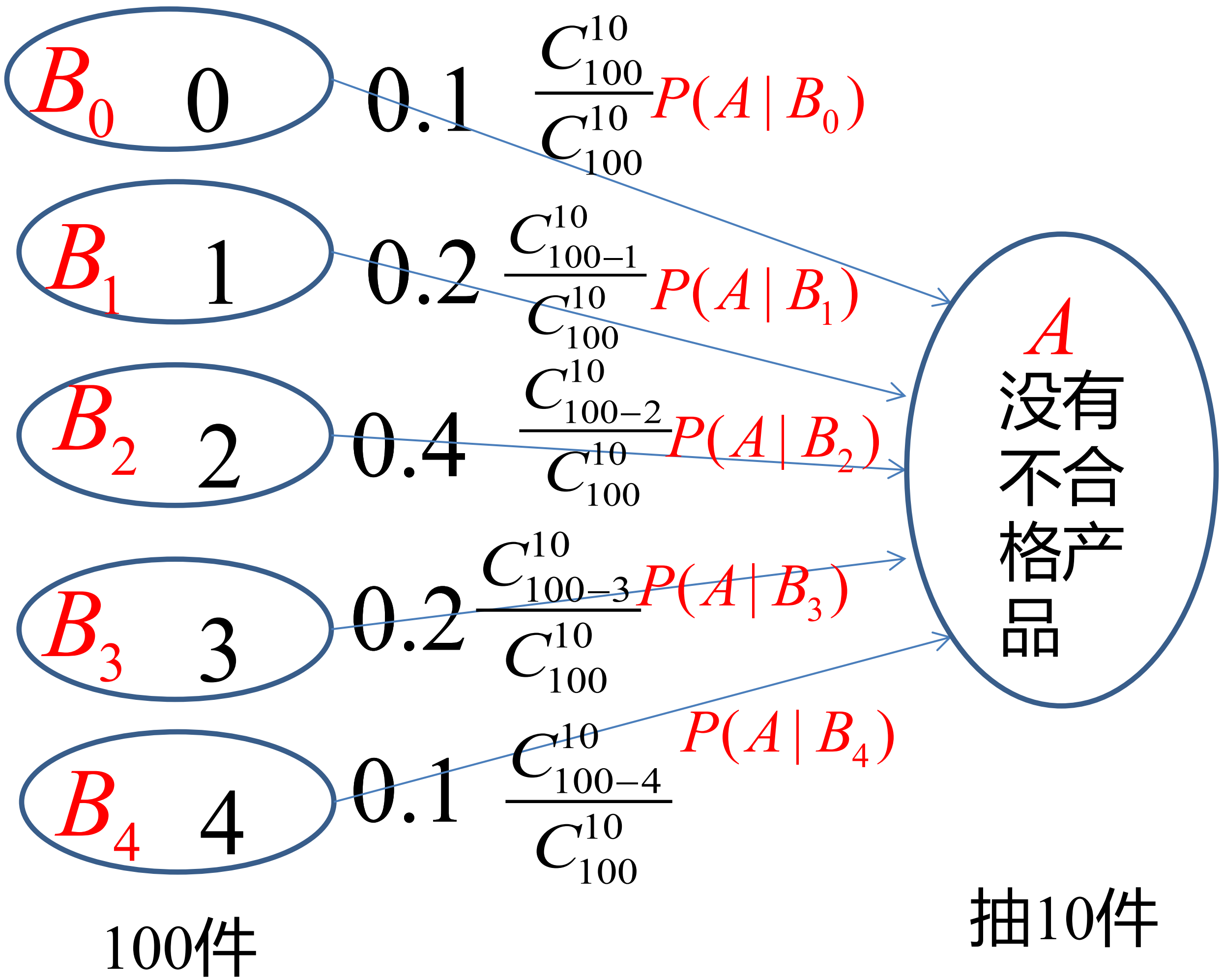
（2）通过检验的产品中恰有 i 件次品的概率

$P(B_i \mid A)$

（1）一批产品通过检验的概率 $P(A)$

（2）通过检验的产品中恰有 i 件次品的概率

$P(B_i \mid A)$



解 设一批产品中有 i 件次品为事件B_i, $i = 0,1,\ldots,4$

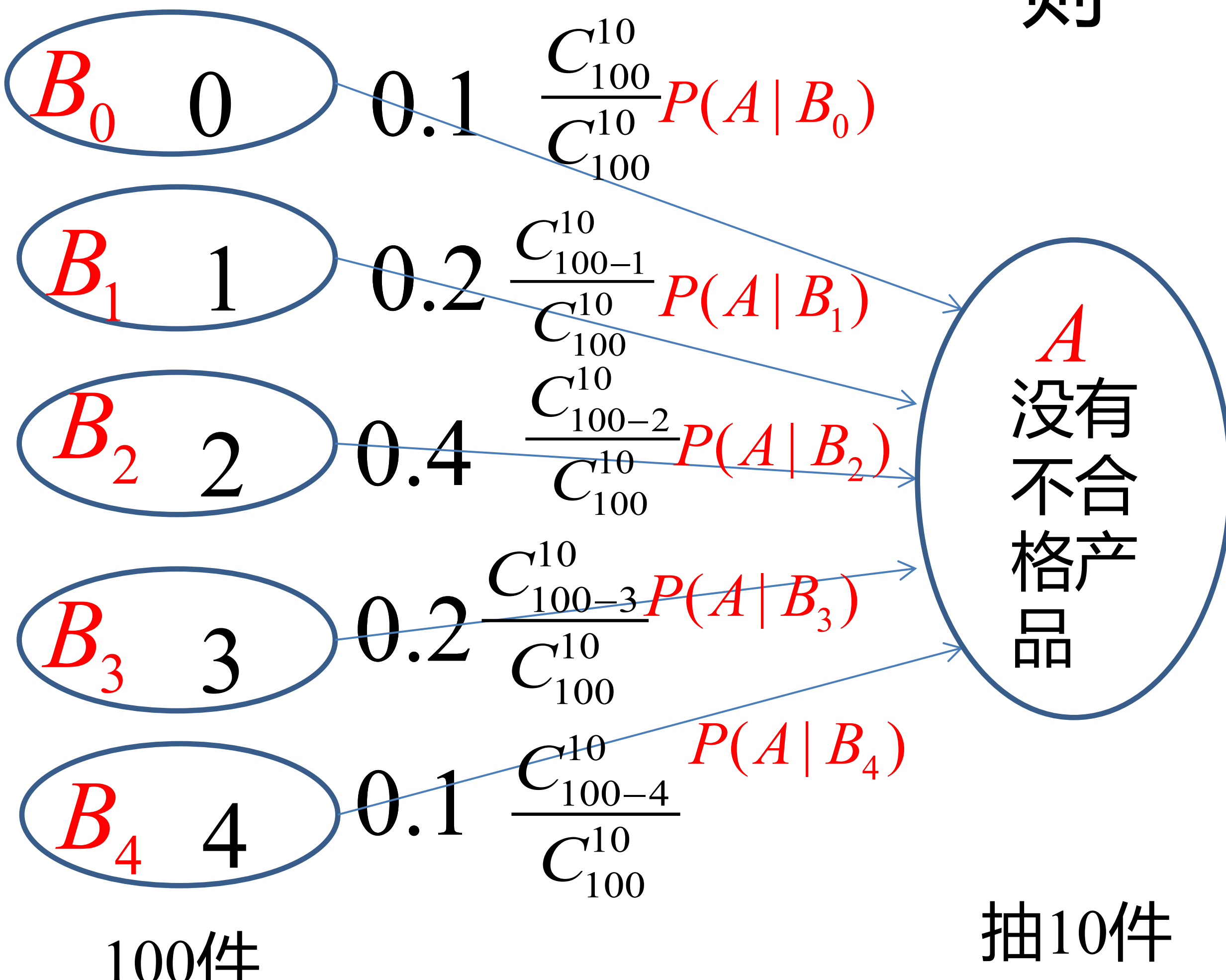
A 为一批产品通过检验

则 $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega \supset A,$

$B_i B_j = \Phi, \; i \neq j,$

$P(B_i)$已知

$$P(A|B_i) = \frac{C_{100-i}^{10}}{C_{100}^{10}},$$



由全概率公式

$$P(A)=\sum_{i=0}^{4}P(B_i)P(A|B_i) \qquad =0.814$$

由Bayes 公式

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}, \quad i=0,1,2,3,4$$

结果如下表所示

i	0	1	2	3	4
$P(B_i)$	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1
$P(A\|B_i)$	1.0	0.9	0.809	0.727	0.652
$P(A)$	0.814				
$P(B_i\|A)$	0.123	0.221	0.397	0.179	0.080

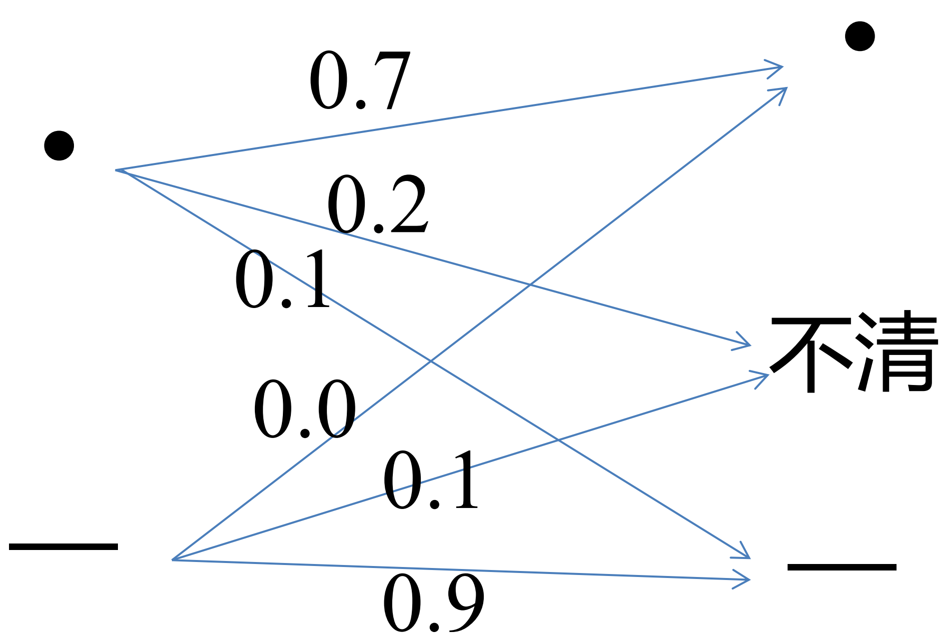
$P(B_i)$ 为先验概率

$P(B_i|A)$ 为后验概率

$$P(B_i) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} P(B_i|A)$$

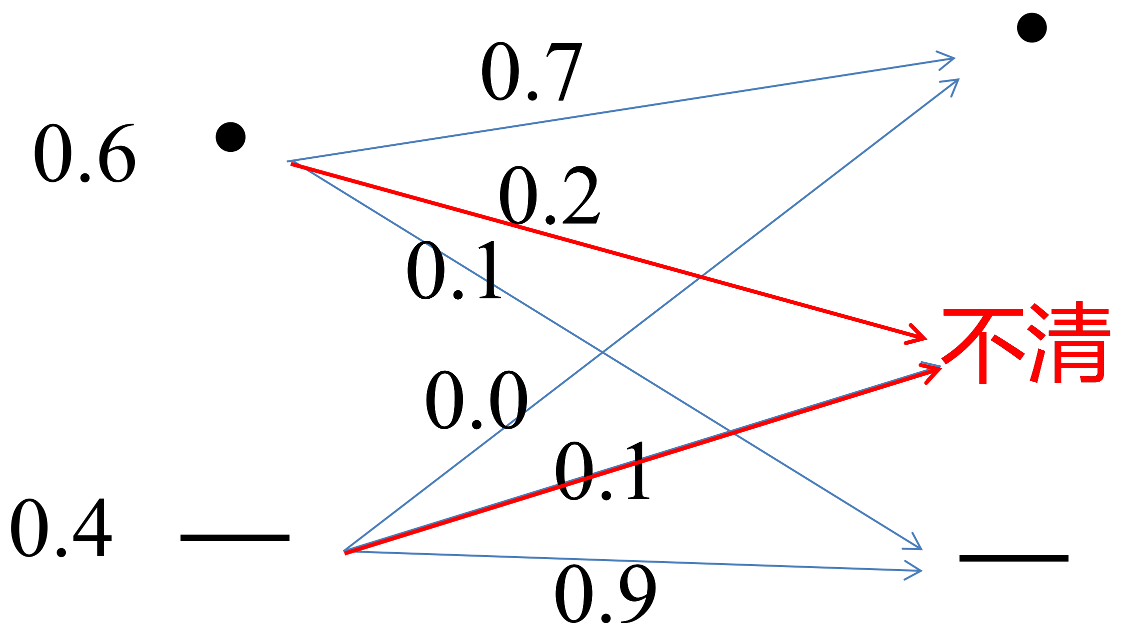
例3 已知由于随机干扰，在无线电通讯中，发出信号“•”时，收到信号“•”，“不清”，“—”的概率分别为0.7, 0.2, 0.1;

发出信号“—”时，收到信号“•”，“不清”，“—”的概率分别为0.0, 0.1, 0.9.



已知在发出的信号中，“·”和“—”出现的概率分别为0.6和0.4，

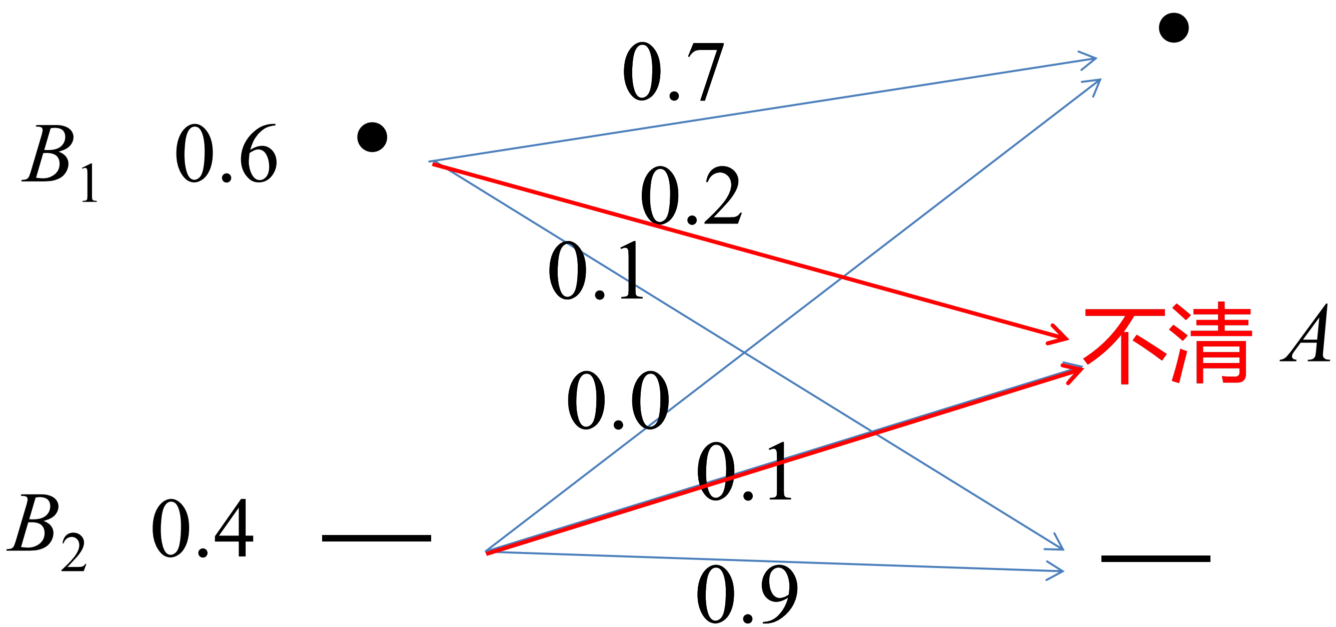
试分析，当收到信号“不清”时，原发信号为“·”和“—”的概率分别是多大？



解 设原发信号为“•”为事件 B_1

原发信号为“—”为事件 B_2

收到信号“不清”为事件 A

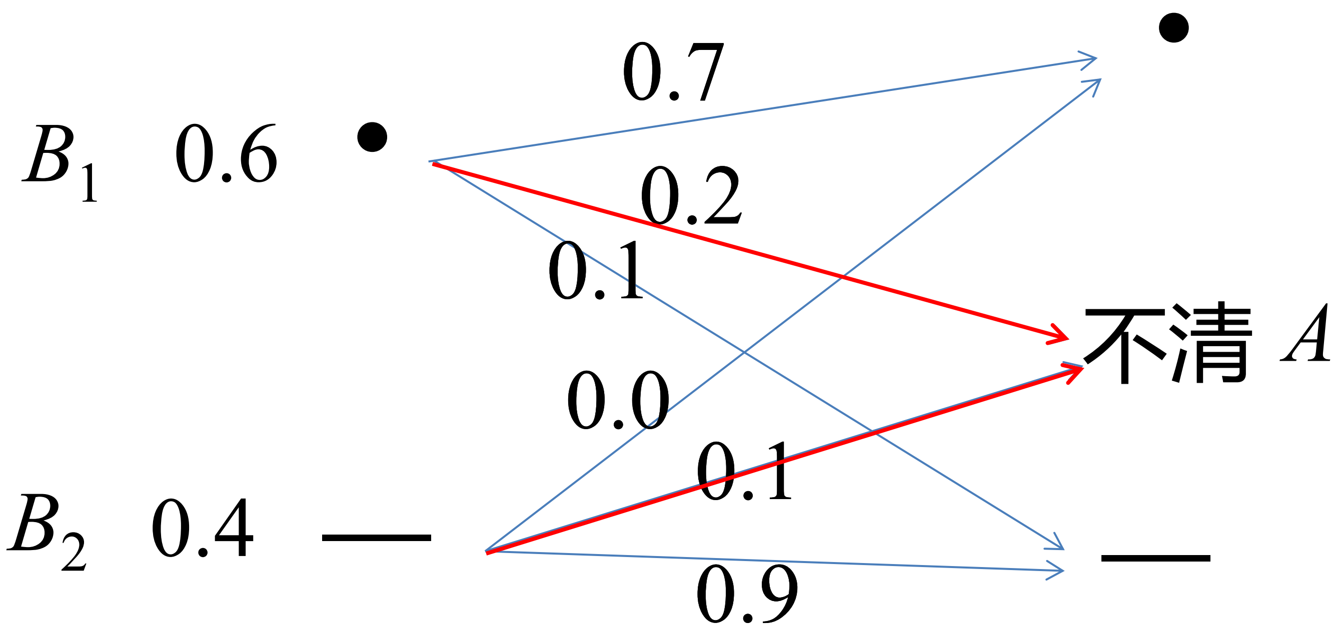


则已知： $A \subset B_1 + B_2, \quad B_1 B_2 = \varnothing$

$$P(B_1) = 0.6, \; P(B_2) = 0.4$$

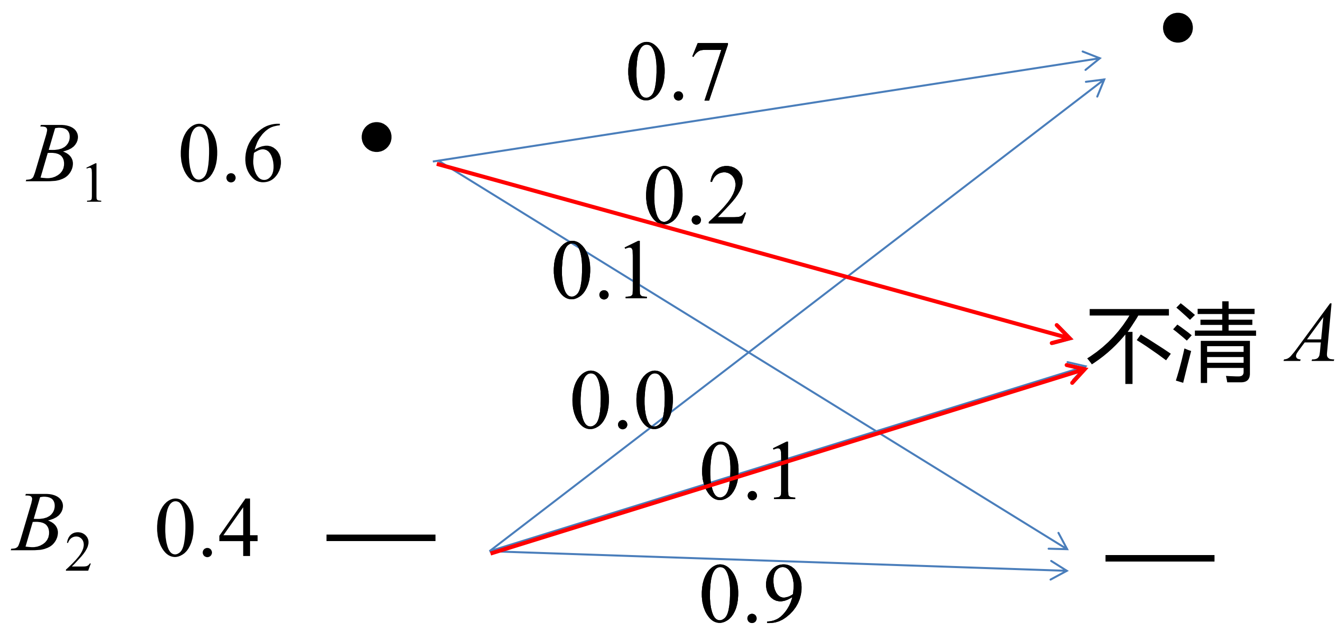
$$P(A | B_1) = 0.2, \; P(A | B_2) = 0.1$$

$$P(A) = P(B_1)P(A | B_1) + P(B_2)P(A | B_2)$$
$$= 0.6 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.1 = 0.16$$



$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(B_1)P(A \mid B_1)}{P(A)} = \frac{3}{4},$$

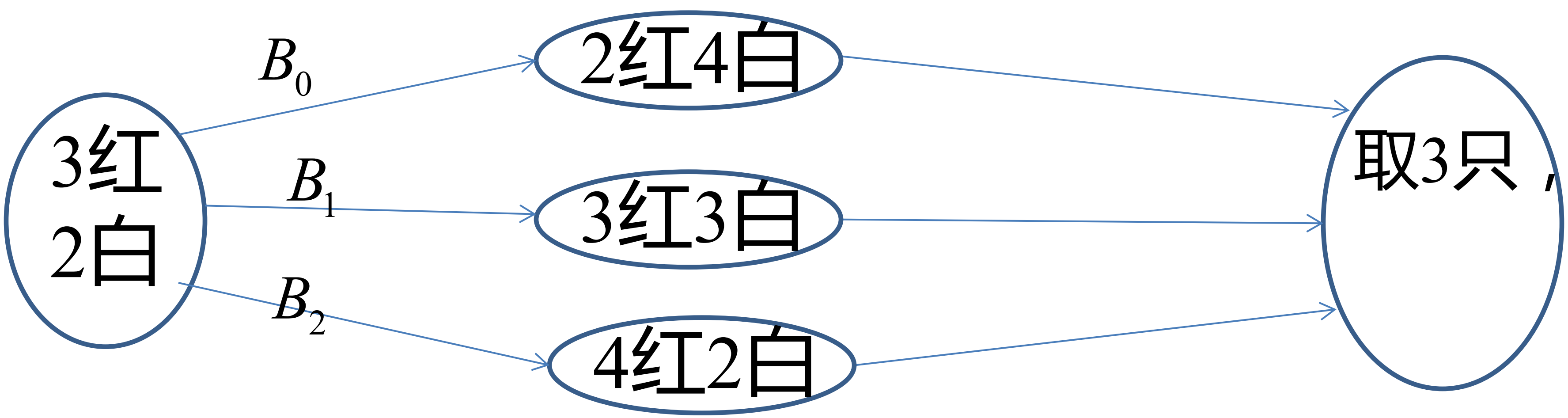
$$P(B_2 \mid A) = \frac{P(B_2)P(A \mid B_2)}{P(A)} = \frac{1}{4}$$



例4 甲袋中装有3只红球、2只白球,乙袋中装有红、白球各2只.从甲袋中任取2只球放入乙袋,然后再从乙袋中任意取出3只球.

设B_i=“从甲袋中恰好取出i只红球(2-i只白球)，i=0,1,2

甲：　　　　　　乙：2红2白



(1)求从乙袋中至多取出1只红球的概率;　　$P(A)$

(2)若从乙袋中取出的红球不多于1只,求从甲袋中取出的2只全是白球的概率.　　$P(B_0 \mid A)$

解 设A=“从乙袋中至多取出1只红球”,

$$P(A)=\sum_{i=0}^{2}P(B_i)(A\mid B_i) \qquad P(B_0\mid A)=\frac{P(B_0)P(A\mid B_0)}{P(A)}$$

甲：3红2白　　乙：2红2白

$$P(B_0)=\frac{C_3^0C_2^{2-0}}{C_5^2}$$ 2红4白 $$P(A\mid B_0)=\frac{C_2^0C_4^3+C_2^1C_4^2}{C_6^3}$$

$$P(B_1)=\frac{C_3^1C_2^{2-1}}{C_5^2}$$ 3红3白 $$P(A\mid B_1)=\frac{C_3^0C_3^3+C_3^1C_3^2}{C_6^3}$$

$$P(B_2)=\frac{C_3^2C_2^{2-2}}{C_5^2}$$ 4红2白 $$P(A\mid B_2)=\frac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}$$

A：取3只，红球至多1只

故由全概率公式得

$$P(A)=\sum_{i=0}^{2}P(B_i)(A\mid B_i)=\frac{1}{10}\times\frac{4}{5}+\frac{6}{10}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{10}\times\frac{1}{5}=\frac{11}{25}$$

由贝叶斯公式得

$$P(B_0\mid A)=\frac{P(B_0)P(A\mid B_0)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{10}\times\frac{4}{5}}{\frac{11}{25}}=\frac{2}{11}$$

甲：　　乙：2红2白