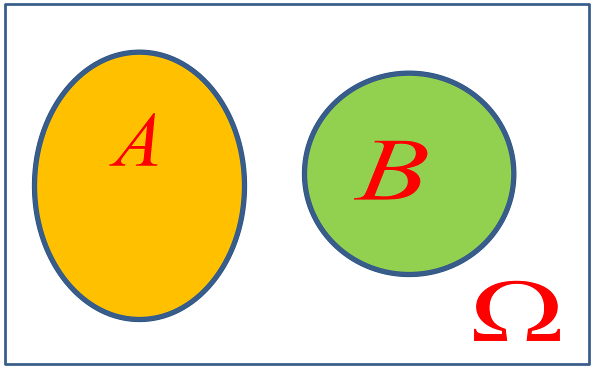
§1.5 事件的独立性

独立性定义1

一般地，P(B)≠P(B|A)

当P(B)=P(B|A)时

称A、B独立



独立性定义2

$$P(B)=P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

例5 已知袋中有5只红球，3只白球，从袋中取球两次，在以下两种取球方式下，求在第一次取得白球的条件下，第二次取得白球的概率

（1）从袋中无放回地取球两次，

（2）从袋中有放回地取球两次。

解 设第一次取得白球为事件 A_1　　$P(A_2|A_1)$

第二次取得白球为事件 A_2

则（1） $P(A_2|A_1)=\frac{2}{7} \neq P(A_2)=\frac{3}{8}$

$=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})$

（2） $P(A_2|A_1)=\frac{3}{8} = P(A_2)=\frac{3}{8} = P(A_2|\overline{A_1})$

两事件相互独立的性质：

- 若P(A)=0或P(A)=1，则对任意事件B，A与B独立

 反之，若对任意事件B，A与B独立，则P(A)=0或P(A)=1，

特别地，Ω和Φ与任意集合B独立

证明： 若P(A)=0 则对任意事件B，有

$$AB \subset A \qquad 0 \le P(AB) \le P(A) = 0$$

$$P(AB) = 0 \quad = P(A)P(B)$$

若对任意事件B，A与B独立，

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

特别取A=B，则

$$P(A) = P(AA) = P(A)P(A)$$

P(A)=0或P(A)=1

- 四对事件 $A,B;\quad A,\overline{B};\quad \overline{A},B;\quad \overline{A},\overline{B}$

  任何一对相互独立，则其它三对也相互独立

  试证其一 $A,\overline{B}$ 独立 $\Rightarrow A,B$ 独立

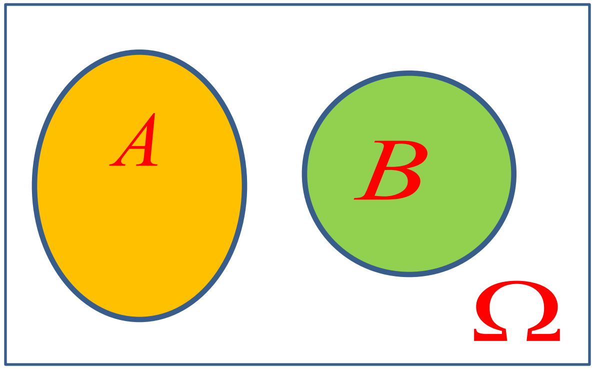
事实上

$$
\begin{aligned}
P(AB) &= P(A-A\overline{B}) \\
&= P(A)-P(A\overline{B}) \\
&= P(A)-P(A)P(\overline{B}) \\
&= P(A)\left[1-P(\overline{B})\right] \\
&= P(A)P(B)
\end{aligned}
$$

- 若 $P(A)>0,\ P(B)>0,$

则"事件 A 与 事件 B 相互独立"和
"事件 A 与 事件 B 互斥"
不能同时成立,独立的时候一定有交集。

$$P(AB)=P(A)P(B)>0$$



定义 三事件 A, B, C 相互独立是指下面的关系式同时成立：

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(BC) = P(B)P(C) \end{cases} \qquad (1)$$

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \qquad (2)$$

注：1) 不能由关系式(1)推出关系式(2), 反之亦然

2)仅满足(1)式时,称 A, B, C 两两独立

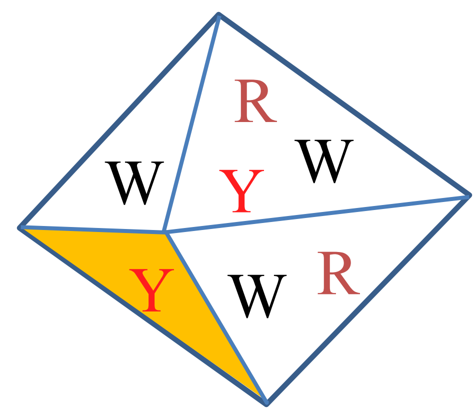
A, B, C 相互独立 $\longrightarrow$ A, B, C 两两独立

例6 有一均匀的八面体，各面涂有颜色如下：

1	2	3	4	5	6	7	8
R	R	R	R				
W	W	W		W			
Y					Y	Y	Y

将八面体向上抛掷一次，观察向下一面出现的颜色。

事件 R, W, Y 分别表示向下一面出现红色，白色，黄色



1	2	3	4	5	6	7	8
R	R	R	R				
W	W	W		W			
Y					Y	Y	Y

则 $$P(R)=P(W)=P(Y)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

$$P(RW)=\frac{3}{8},\quad P(WY)=P(RY)=\frac{1}{8}$$

$$P(RWY)=\frac{1}{8}=P(R)P(W)P(Y)$$

但 $$P(RW)\neq P(R)P(W)$$

$$P(WY)\neq P(W)P(Y)$$

$$P(RY)\neq P(R)P(Y)$$

即：不能由关系式(2)推出关系式(1)

例7 随机投掷编号为 1 与 2 两个骰子，令事件

A 表示第一个骰子向上一面出现的点数为奇数

B 表示第二个骰子向上一面出现的点数为奇数

C 表示两骰子向上一面出现的点数之和为奇数

则 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{2}$

$$P(AB)=P(BC)=P(CA)=\frac{1}{4}$$

$$=P(A)P(B)=P(B)P(C)=P(C)P(A)$$

但 $P(ABC)=0 \neq \dfrac{1}{8}=P(A)P(B)P(C)$

本例说明不能由A, B, C 两两独立

$\longrightarrow$ A, B, C 相互独立

定义 n 个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 相互独立是指下面的关系式同时成立：

$$P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j), \ 1 \le i < j \le n$$

$$P(A_iA_jA_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k), \ 1 \le i < j < k \le n$$

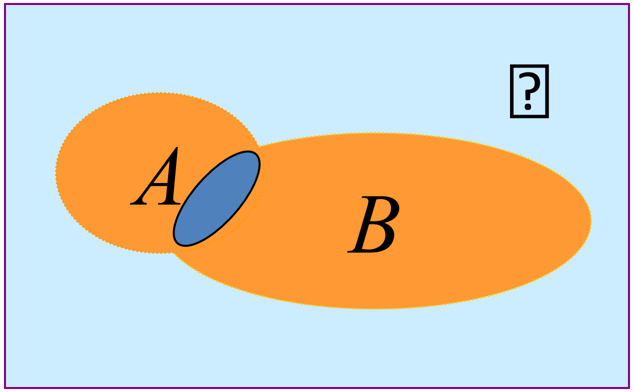
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

常根据实际问题的意义判断事件的独立性

例8 设甲乙两人独立地射击同一目标,他们击中目标的概率分别为0.8和0.6。每人射击一次，求目标被击中的概率。

解 ：令A=目标被击中，B=甲击中目标，C=乙击中目标，



由题意知 $A = B + C,$

B、C独立

$$P(B) = 0.8, \quad P(C) = 0.6$$

于是 $P(A) = P(B+C) = P(B) + P(C) - P(BC)$

$$= P(B) + P(C) - P(B)P(C)$$

$$= 0.8 + 0.6 - 0.8 \times 0.6 = 0.92$$

常利用独立事件的性质计算它们的并事件的概率

例9 设每个人的血清中含有某种病毒的概率为0.4%，求来自不同地区的100个人的血清混合液中含有某种病毒的概率

解 设这100 个人的血清混合液中含有某种病毒为事件 A,

第 i 个人的血清中含有某种病毒为事件 A_i，$i=1,2,\ldots,100$

则 $$A=\bigcup_{i=1}^{100} A_i$$

$$P(A)=P(\bigcup_{i=1}^{100}A_i)=P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{100})$$

$$=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{100}})$$

$$=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_{100}})$$

$$=1-\prod_{i=1}^{100}P(\overline{A_i})$$

$$=1-\prod_{i=1}^{100}(1-P(A_i))=1-(1-0.004)^{100}\approx 0.33$$

$$p=1-(1-0.004)^n\quad\to 1$$

—— 不能忽视小概率事件，小概率事件迟早要发生

例10 某型号火炮的命中率为0.8，现有一架敌机即将入侵，如果欲以 99.9 % 的概率击中它，则需配备此型号火炮多少门？

解 设需配备 n 门此型号火炮，

设事件A_i表示第i 门火炮击中敌机

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \left[1 - P(A_i)\right]^n = 1 - 0.2^n > 0.999$$

$$n > \frac{\ln 0.001}{\ln 0.2} \approx 4.29$$

故需配备 5 门此型号火炮.

例11 系统的可靠性问题

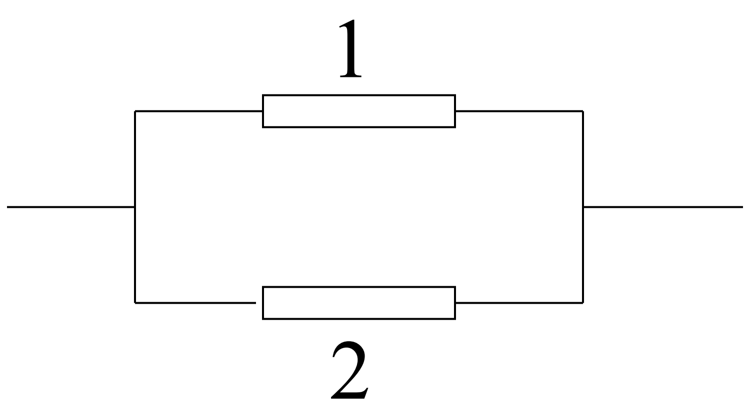
一个元件能正常工作的概率称为元件的可靠性

一个系统能正常工作的概率称为系统的可靠性

系统是由元件组成的，常见的元件的连接方式：

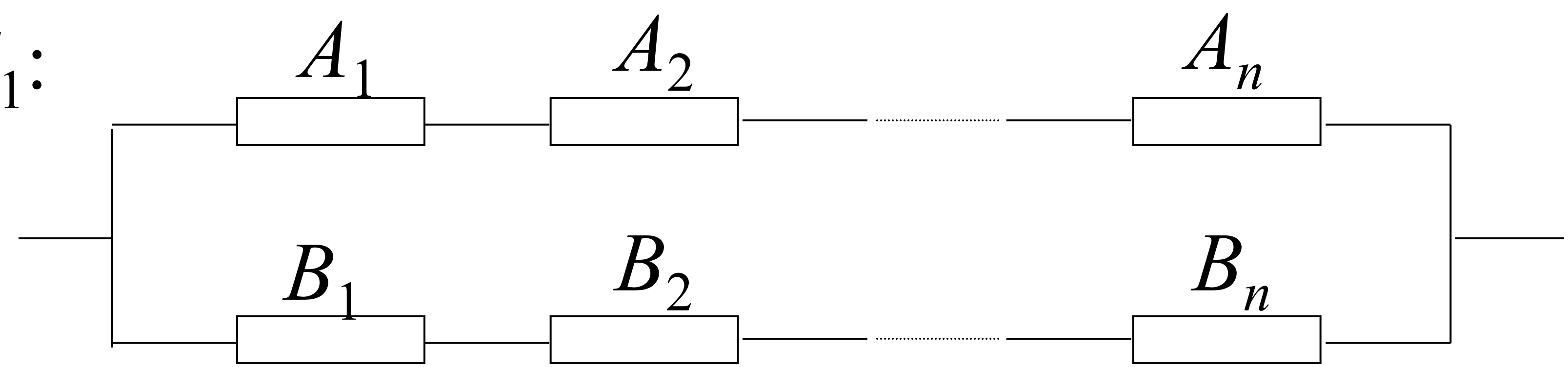
串联

并联



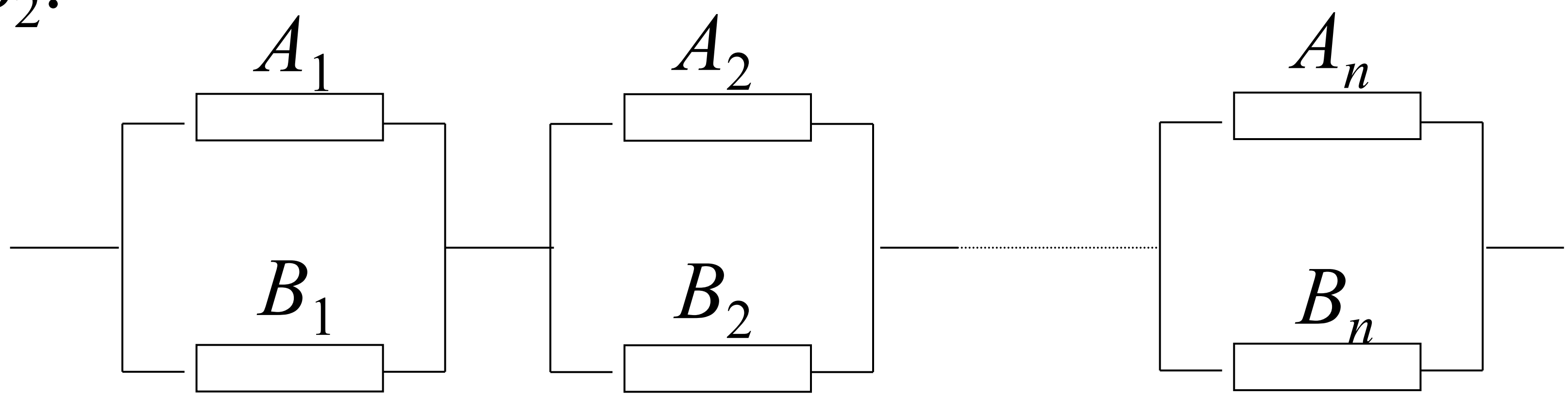
设两系统都是由 $2n$ 个元件组成，每个元件正常工作的概率为 p，每个元件是否正常工作相互独立。两系统的连接方式如下图所示，比较两系统的可靠性。

S_1:



$$
\begin{aligned}
P(S_1) &= P(A_1A_2\cdots A_n) + P(B_1B_2\cdots B_n) \\
&\quad - P(A_1A_2\cdots A_nB_1B_2\cdots B_n) \\
&= 2p^n - p^{2n} = p^n(2-p^n)
\end{aligned}
$$

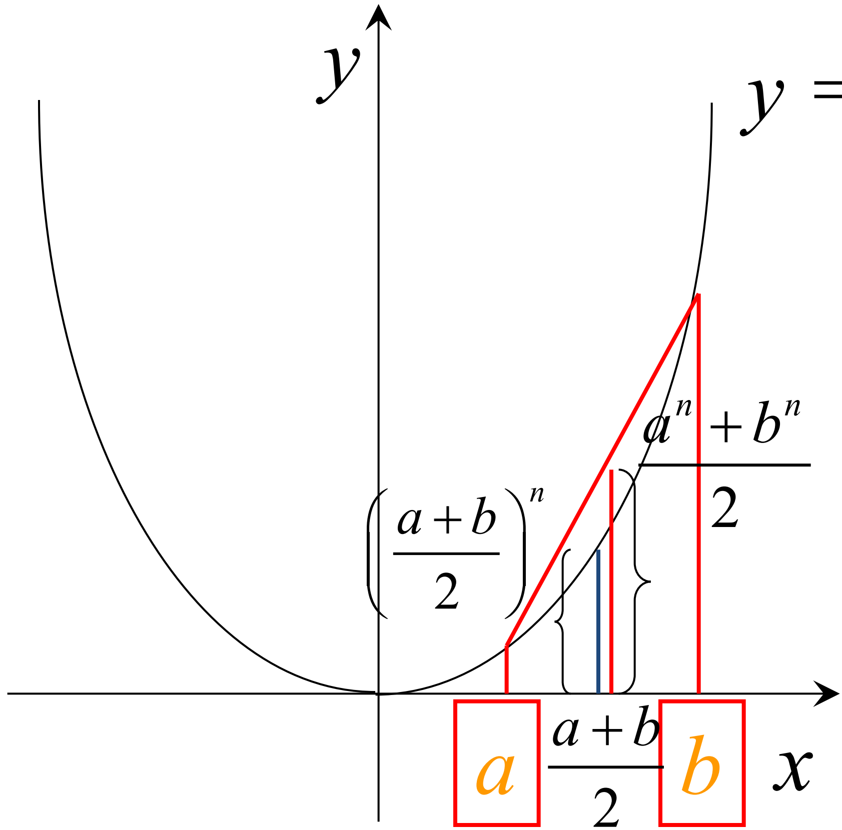
S_2:



$$P(S_2) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i \cup B_i)$$

$$= \left(2p - p^2\right)^n = p^n (2 - p)^n$$

$$P(S_2) \geq P(S_1)$$



$y = x^n$ —— 下凸

$$0 < a < b$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n < \frac{a^n + b^n}{2}$$

取 $a = p\, ,b = 2 - p$

$$0 < p < 1$$

$$\Longrightarrow \quad 1 < \frac{p^n + (2-p)^n}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad 2 - p^n < (2-p)^n$$

$$\Longrightarrow \quad P(S_1) < P(S_2)$$

Bernoulli 试验概型

n 重Bernoulli 试验概型：

- 随机试验有两个可能的结果： $A, \bar{A}$
- 将此试验独立的重复 n 次

设 $P(A) = p, \quad 0 < p < 1$

n 重Bernoulli 试验概型感兴趣的问题为：
在 n 次试验中事件 A 出现 k 次的概率，记为

$$P_n(k) = C_n^k \left(p\right)^k \left(1 - p\right)^{n-k}$$