第二章 随机变量及其分布

随机变量概念

E_1 甲乙两人下棋，观察比赛的结果

$$S_1 = \{甲胜, \quad 和棋, \quad 乙胜\} = \{A, B, C\}$$

甲胜或乙胜=A∪B

$$X_1(e) = \begin{cases} 1 & e = 甲胜 \\ 0 & e = 和棋 \\ -1 & e = 乙胜 \end{cases}$$

则：甲胜或乙胜: X_1=1或-1

或 $|X_1|=1$

$$S_1 = \{\text{甲胜，和棋，乙胜}\}$$

$$X_1(e) = \begin{cases} 1 & e = \text{甲胜} \\ 0 & e = \text{和棋} \\ -1 & e = \text{乙胜} \end{cases}$$

则：1、X_1是定义在S_1上的一个函数

2、随机试验的结果可以用X_1的取值表示

3、X_1的取值是随机的

$\mathbf{E_2}$ 记录某电话交换台收到的呼叫次数

$$S_2 = \{0,\ 1,\ 2, \cdots\} = \{A_0, A_1, A_2, \cdots\}$$

$$X_2 = k, \quad \text{当}\, e = k\,\text{时}$$

A=“呼叫次数不超20” $X_2 \le 20$

B=“呼叫次数大于8” $X_2 > 8$

$A \cap B = ?$ $8 < X_2 \le 20$

$$S_2 = \{0,\ 1,\ 2, \cdots\}$$

$$X_2 = k, \quad 当 e = k 时$$

则：1、X_2是定义在S_2上的一个函数

2、随机试验的结果可以用X_2的取值表示

3、X_2的取值是随机的

E_3 从一批灯泡中任取一只，测其寿命

$$S_3=[0,+\infty)\quad=\{\,t\mid t\geq 0\,\}$$

$$X_3=t,\quad \text{当}\, e=t\,\text{时}$$

A=“灯泡寿命不大于1000小时”　　$X_3\leq 1000$

B=“灯泡寿命大于200小时”　　$X_3>200$

则：1、X_3是定义在S_3上的一个函数

2、随机试验的结果可以用X_3的取值表示

3、X_3的取值是随机的

连续型

离散型

定义1 设随机试验的样本空间为S, 如果对于每一个样本点e，都有确定的实数值$X(e)$与之对应，则称这样的实值变量$X(e)$为随机变量，简记为X。

1、X是定义在S上的一个函数

2、随机试验的结果可以用X的取值表示

3、X的取值是随机的

随机变量通常用大写英文字母X、Y、Z或希腊字母ξ、η、ζ表示

随机变量的分类

- 离散型 :随机变量的取值只有有限个或可列个
- 连续性：
- 非离散非连续随机变量

随机事件的概率问题就转化为
随机变量取值的概率问题。

2.2随机变量的分布函数

随机事件的概率问题就转化为随机变量取值的概率问题。

(1)对每个实数 x , 随机事件 " $X = x$ " 的概率

(2)对每个实数 x , 随机事件 " $X \leq x$ " 的概率

$$P(8<X\leq 20) = P(X\leq 20) - P(X\leq 8)$$

$$P(X> 50) = 1 - P(X\leq 50)$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

定义 设 X 为随机变量, 对每个实数 x , 随机事件 $(X \le x)$ 的概率

$$P(X \le x)$$

是一个 x 的实值函数，称为随机变量 X 的分布函数，记为$F(x)$,即

$$F(x) = P(X \le x), \quad -\infty < x < +\infty$$

分布函数是定义于实数轴上的实函数.

分布函数的性质

1、$0 \le F(x) \le 1$ ，且

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1,\ \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

证：$F(x) = P\{X \le x\} = P\{e \in S \mid -\infty < X(e) \le x\}$

$$0 \le F(x) \le 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} P(X \le x) = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} P(X \le x) = 0$$

2、$F(x)$ 单调不减，即：

$$\forall\, x_1 < x_2,\ F(x_1) \le F(x_2)$$

证：$\forall\, x_1 < x_2,\ \{X \le x_1\} \subset \{X \le x_2\}$

$$P\{X \le x_1\} \le P\{X \le x_2\}$$

$$F(x_1) \le F(x_2)$$

3、$F(x)$ 右连续，即

$$F(x+0)=\lim_{\Delta x\to 0+} F(x+\Delta x) = F(x)$$

理解：当$\Delta x\to 0$时，对于任意确定的$x+\varepsilon>x$,

随机变量在此点的概率$P(X=x+\varepsilon)$

不包含在$P(X\le x+\Delta x)$ 中

即不包含在$F(x+\Delta x)$中

故$F(x+\Delta x)$只包含点x及小于x的点的概率

即$P(X\le x)$ 即$F(x)$

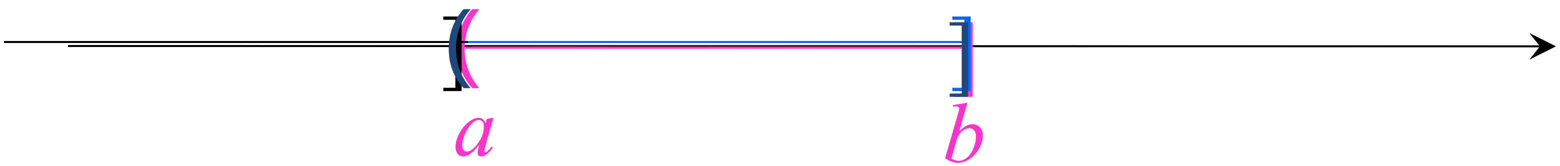
故 $F(x+0)=F(x)$

上述三个性质为分布函数的基本性质

即：具备上述三个性质的函数 $F(x)$ 都是某一随机变量的分布函数

4、用分布函数可以计算

$$P(a < X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a)$$
$$= F(b) - F(a)$$



$$P(X > a) = 1 - P(X \le a) = 1 - F(a)$$
$$P(X = a) = F(a) - F(a-0)$$

请填空

$$P(a \le X \le b) = \underline{F(b) - F(a-0)}$$
$$P(a < X < b) = \underline{F(b-0) - F(a)}$$
$$P(a \le X < b) = \underline{F(b-0) - F(a-0)}$$

例1 投掷一颗匀称的骰子,记录其出现的点数.令

$$X=\begin{cases}0, \text{当出现奇数点} \\ 1, \text{当出现偶数点}\end{cases}$$

则X是一个随机变量.求X的分布函数.

解 $P\{X=0\}=\dfrac{1}{2}$ $P\{X=1\}=\dfrac{1}{2}$

$$F(x)=P\{X\le x\}$$

当x<0时，$\{X\le x\}=\phi$

$$F(x)=P\{X\le x\}=0$$

当0≤x<1时， $\{X \le x\} = \{X = 0\}$

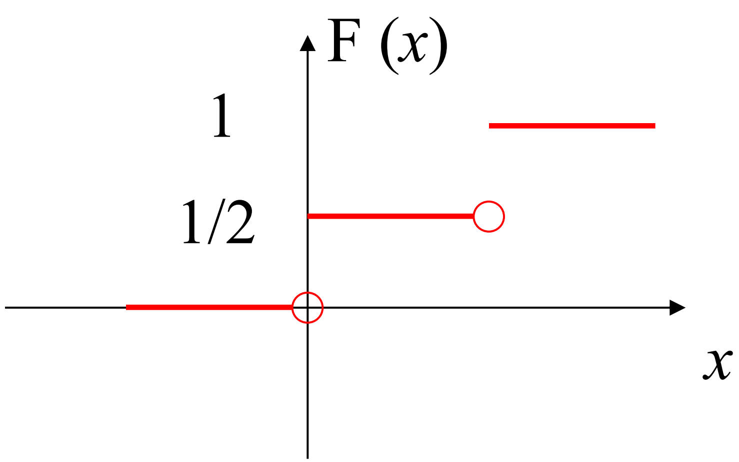
$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = 0\} = \frac{1}{2}$$

当x≥1时， $\{X \le x\} = \{X = 0\} + \{X = 1\} = S$

$$F(x) = P\{X \le x\} = 1$$

于是得到随机变量的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \frac{1}{2}, 0 \le x < 1 \\ 1, x \ge 1 \end{cases}$$



例2 已知随机变量的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}a+be^{-x}, x>0\\0, x\le 0\end{cases}$$

(1)确定常数a,b

(2)求P(X≤ln2)和P(X>1)

解 (1)由分布函数的性质,得

$$1=\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}(a+be^{-x})=a$$

$$0=F(0)=\lim_{x\to0^+}F(x)=\lim_{x\to0^+}(a+be^{-x})=a+b$$

所以a=1, b=-1

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$$

(2) $$P\{X\le \ln 2\}=F(\ln 2)$$

$$=1-e^{-\ln 2}$$

$$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$P\{X>1\}=1-P\{X\le 1\}$$

$$=1-F(1)$$

$$=1-(1-e^{-1})=e^{-1}$$

例3 某人打靶,圆靶半径为1m。设射击一定中靶,且击中靶上任一与靶同心的圆盘的概率与该圆靶的面积成正比.以X表示弹着点至靶心的距离,试求随机变量X的分布函数.

解: 根据题意,X可能取[0,1]上的任何实数.

$$F(x) = P\{X \le x\}$$

当x<0时 $\{X \le x\} = \phi$

$$F(x) = P\{X \le x\} = 0$$

当$0 \le x \le 1$时

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X < 0\} + P\{0 \le X \le x\}$$

$$= P\{0 \le X \le x\}$$

$$= kx^2$$

由于$\{x \le 1\}$是必然事件，故

$$1 = F(1) = P\{X \le 1\} = k$$

当 $x>1$时, $\{X \le x\}$是必然事件，

$$F(x) = P\{X \le x\} = 1$$

故 $$F(x)=\begin{cases}0, x<0 \\ x^2, 0\le x<1 \\ 1, x\ge 1\end{cases}$$