§2.3 离散型随机变量及其概率分布

离散型随机变量的概念

定义 若随机变量 X 的可能取值是有限多个或无穷可列多个，则称 X 为**离散型随机变量**

例如1:投掷一颗匀称的骰子,记录其出现的点数.令

$$X=\begin{cases}0, & \text{当出现奇数点}\\ 1, & \text{当出现偶数点}\end{cases}$$

则 X 是一个离散型随机变量.

例如2：对目标进行射击,直到击中目标为止,记 Y 为所需射击次数.

如何描述离散型随机变量的概率特性

例1中:投掷一颗匀称的骰子,记录其出现的点数.令

$$X=\begin{cases}0,\text{当出现奇数点}\\1,\text{当出现偶数点}\end{cases}$$

则X是一个离散型随机变量.

$$F(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \dfrac{1}{2}, 0\le x<1\\ 1, x\ge 1\end{cases}$$

$$P\{X=0\}=\frac{1}{2} \qquad P\{X=1\}=\frac{1}{2}$$

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

离散型随机变量X的分布律

离散型随机变量X的分布律的表示方法

(1)公式法

$$p_k = P\{X = x_k\} \quad k = 1,2,\cdots$$

(2)列表法或矩阵法.

X	X_1	X_2	•••	X_k	•••
P	p_1	p_2	•••	p_k	•••

例如2：对目标进行射击，每次击中的概率为p，直到击中目标为止，记 Y 为所需射击次数.

解： $Y = 1, 2, 3, \cdots$

$$P(Y = k) = (1 - p)^{k-1} p$$

Y	1	2	•••	k	•••
P	p	$(1\text{-}p)p$	•••	$(1\text{-}p)^{k\text{-}1}p$	•••

$$P(X=x_k)=p_k,\ k=1,2,\cdots$$

分布律的基本性质

- $p_k \geq 0,\ k=1,2,\cdots$ ———— 非负性
- $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$ ———— 规范性

$$\sum_k p_k = \sum_k P\{X=x_k\} = P(\sum_k \{X=x_k\})$$

$$= P\{S\} = 1$$

反之，可以证明,任意一个具有（1）和(2)两条性质的一串数p_1、p_2、•••、p_k、•••、一定是某一个随机变量的分布律

分布律和分布函数可互相确定的方法如下:

定理：设X为离散型随机变量，具有分布律

$$P\{X = x_k\} = p_k, k = 1,2\cdots,$$

则：(1)X的分布函数

$$F(x) = P\{X \le x\} = \sum_{:x_k \le x} p_k, -\infty < x < \infty$$

事实上，$F(x) = P\{X \le x\}$

$$= P(\sum_{x_k \le x} \{X = x_k\})$$

$$= \sum_{x_k \le x} P\{X = x_k\}$$

$$= \sum_{x_k \le x} p_k$$

（2）对任意区间I，有

$$P\{X \in I\} = \sum_{x_k \in I} P\{X = x_k\}$$
$$= \sum_{x_k \in I} p_k$$

（3）从分布函数

$$F(x) = P\{X \le x\}, -\infty < x < \infty$$

可以确定分布律

$$p_k = P\{X = x_k\} = F(x_k) - F(x_k^-)$$
$$k = 1,2\cdots,$$

其中 $F(x_k^-) = \lim\limits_{x \to x_k^-} F(x)$

例3 将红、白、黑三只球随机地逐个放入编号为1、2、3的三个盒中（每盒容纳球的个数不限）。设X为有球的盒子的最小号码，试求：

（1）随机变量的分布律与分布函数；

（2）P（$|X| \leq 2$）

解 根据题意知，随机变量X可能取的值为：1，2，3;则：

$$P\{X = 3\} = \frac{1^3}{3^3} = \frac{1}{27}$$

$$P\{X=2\}=\frac{2^3-1^3}{3^3}=\frac{7}{27}$$

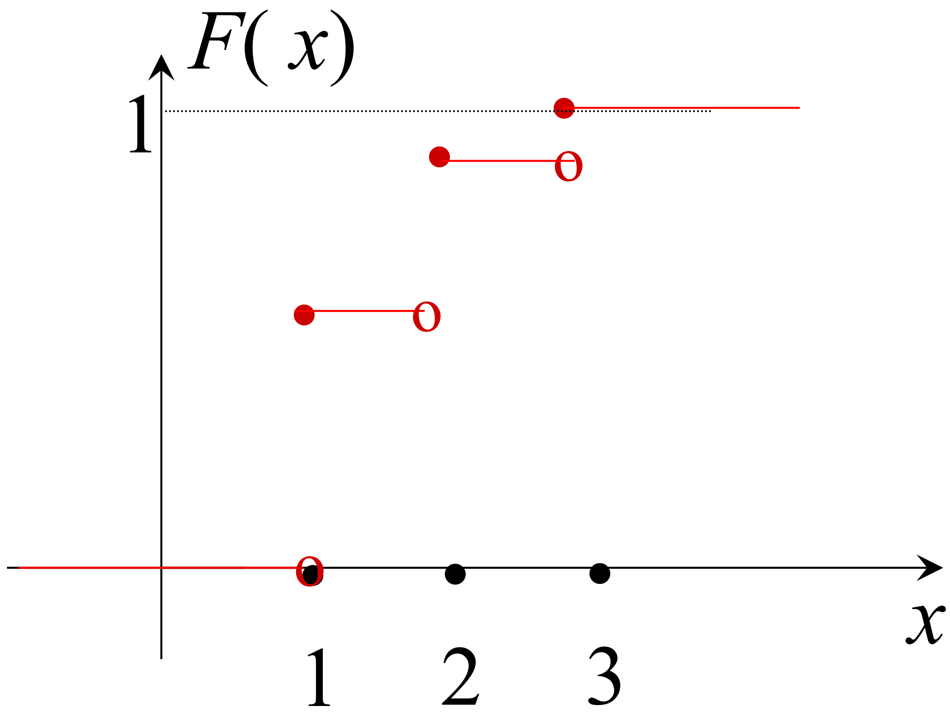
$$P\{X=1\}=\frac{3^3-2^3}{3^3}=\frac{19}{27}$$

即随机变量X的分布律为

X	1	2	3
P	$\frac{19}{27}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{1}{27}$

X的分布函数为

$$F(x)=\sum_{x_k\le x}P\{X=x_k\}=\begin{cases}0, x<1\\ \dfrac{19}{27}, 1\le x<2\\ \dfrac{26}{27}, 2\le x<3\\ 1, x\ge 3\end{cases}$$



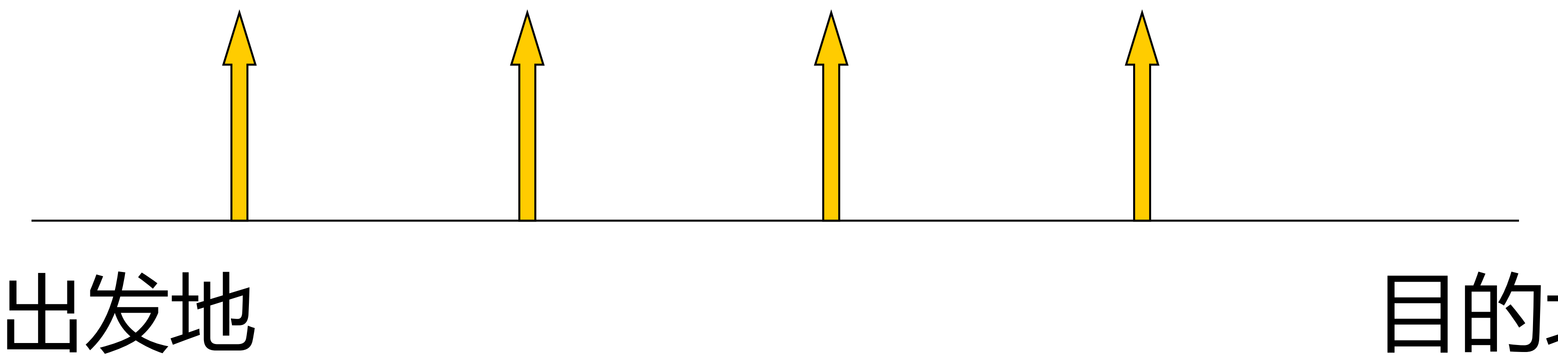
$F(x)$ 是分段阶梯函数，在 X 的可能取值 x_k 处发生间断，间断点为跳跃间断点，在间断点处有跃度 p_k

（2）$P\{|X|\leq 2\}=P\{-2\leq X\leq 2\}$

$$=P\{X=1\}+P\{X=2\}$$

$$=\frac{7}{27}+\frac{19}{27}=\frac{26}{27}$$

例4 设一汽车在开往目的地的途中需经过 4 盏信号灯，每盏信号灯独立地以概率 p 允许汽车通过。令 X 表示首次停下时已通过的信号灯的盏数，求 X 的分布律与 $p=0.4$ 时的分布函数。



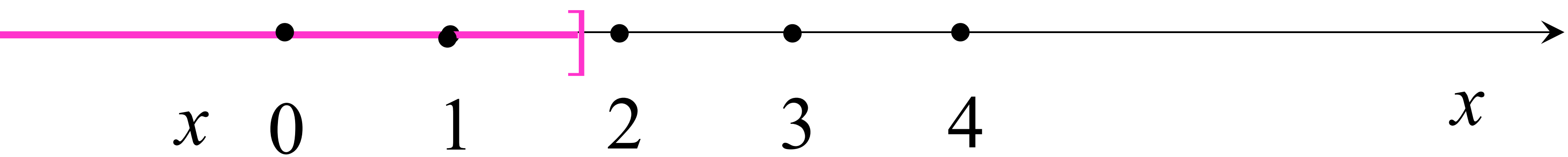
解

$$P(X=k)=p^k(1-p),\ \ k=0,1,2,3$$

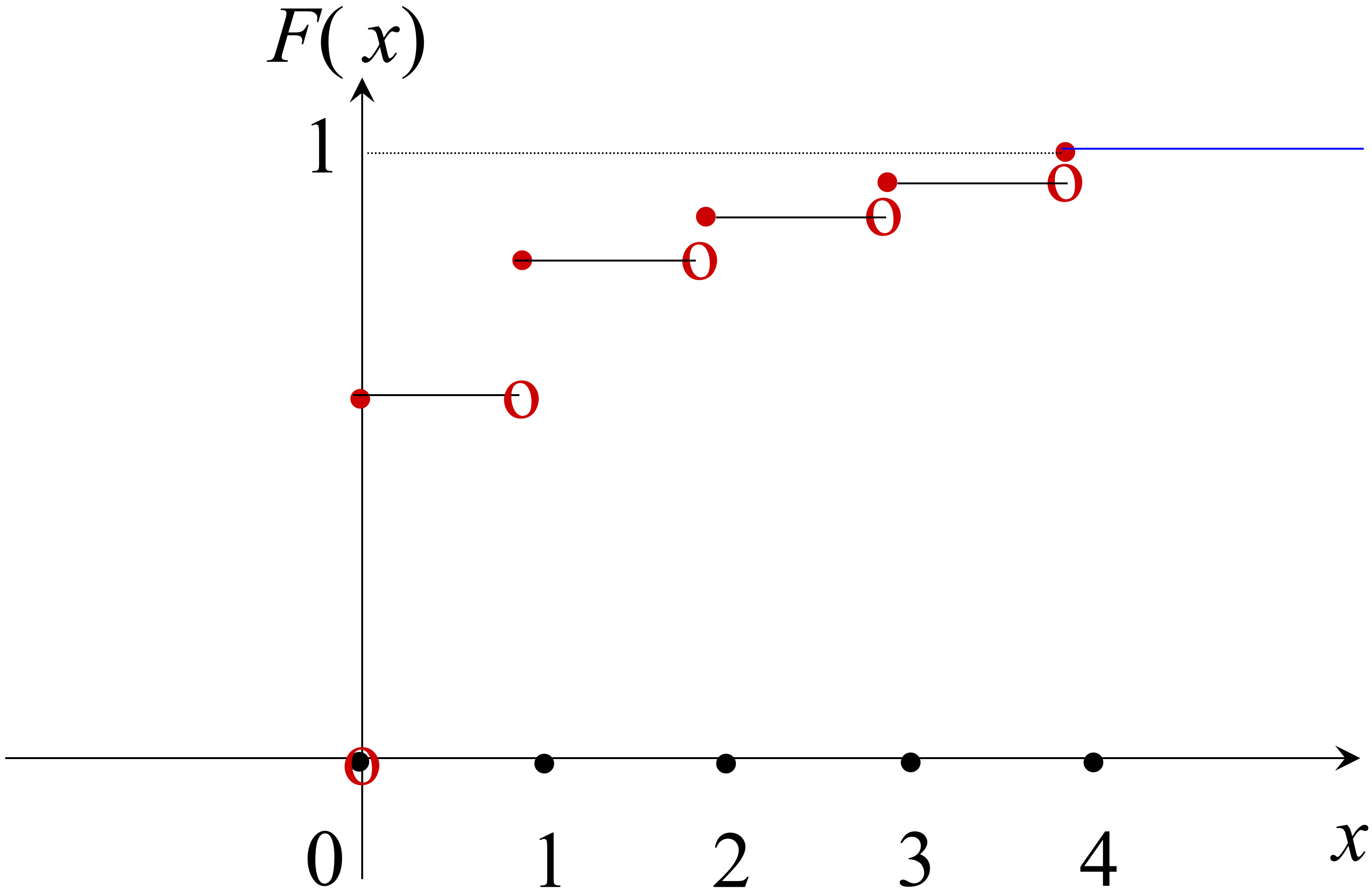
$$P(X=4)=p^4,\qquad\qquad k=4$$

当 $p=0.4$

k	0	1	2	3	4
p_k	0.6	$0.4\cdot 0.6$	$0.4^2\cdot 0.6$	$0.4^3\cdot 0.6$	0.4^4



$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 0.6, & 0\le x<1 \\ 0.6+0.6\times 0.4, & 1\le x<2 \\ 0.6+0.6\times 0.4+0.6\times 0.4^2, & 2\le x<3 \\ 0.6(1+0.4+0.4^2+0.4^3), & 3\le x<4 \\ 1 & x\ge 4 \end{cases}$$



F(x)
1
0
1
2
3
4
x

分布律或分布函数可分别独立计算有关事件的概率

例5 在上例中，分别用分布律与分布函数计算下述事件的概率：

$$P(1 < X \leq 3),\ P(1 \leq X \leq 3),$$

$$P(X \geq 2),\ P(X > 2), P(X = 2)$$

解 $P(1 < X \leq 3) = P(X = 2) + P(X = 3)$

$$= 0.4^2 \times 0.6 + 0.4^3 \times 0.6 = 0.1344$$

或 $P(1 < X \leq 3) = F(3) - F(1)$

$$= 0.4^2 \times 0.6 + 0.4^3 \times 0.6 = 0.1344$$

$$P(1\le X\le 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$$
$$=0.6(0.4+0.4^2+0.4^3)=0.3744$$

或

$$P(1\le X\le 3)=P(1<X\le 3)+P(X=1)$$
$$=F(3)-F(1)+P(X=1)$$
$$=F(3)-F(1)+\left[F(1)-F(1-0)\right]$$
$$=F(3)-F(1-0)$$
$$=0.4^2\times 0.6+0.4^3\times 0.6+\left[0.6\times 0.4\right]$$
$$=0.3744$$

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) \\
&= 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1)\} \\
&= 0.16
\end{aligned}
$$

或

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) \\
&= 1 - \left[P(X \leq 2) - P(X = 2)\right] \\
&= 1 - \underline{F(2-0)} \\
&= 0.16
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{此式应理解为极限} \lim\limits_{x \to 2^-} F(x)}$

$$
\begin{aligned}
P(X>2) &= 1-P(X\le 2) \\
&= 1-\{P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\} \\
&= 0.064
\end{aligned}
$$

或 $$
\begin{aligned}
P(X>2) &= 1-P(X\le 2) \\
&= 1-F(2) \\
&= 0.064
\end{aligned}
$$

$$P(X=2)=F(2)-F(2-0)=0.096$$

或 $P(X=2)=0.096$

对离散型随机变量用分布律比用分布函数计算这些概率更方便

例6 一门大炮对目标进行轰击，假定此目标必须被击中r 次才能被摧毁。若每次击中目标的概率为$p\ (0<p<1)$, 且各次轰击相互独立，一次一次地轰击直到摧毁目标为止。求所需轰击次数 X 的分布律。

解 $P(X=k)=P($前 $k-1$次击中 $r-1$次，第 k 次击中目标$)$

$$=C_{k-1}^{r-1}p^{r-1}(1-p)^{k-r}\cdot p$$

$$=C_{k-1}^{r-1}p^{r}(1-p)^{k-r}$$

$$k=r,r+1,\cdots$$

注 $\sum_{k=r}^{\infty} C_{k-1}^{r-1} p^{r} (1-p)^{k-r} = 1$

利用幂级数在收敛域内可逐项求导的性质

当 $|x|<1$ $\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1-x}$

$$\sum_{k=2}^{\infty} (k-1) x^{k-2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{k=3}^{\infty} (k-1)(k-2) x^{k-3} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=3}^{\infty} C_{k-1}^{2} x^{k-3} = \frac{1}{(1-x)^3}$$

归纳地

$$\sum_{k=r}^{\infty} C_{k-1}^{r-1} x^{k-r} = \frac{1}{(1-x)^r}$$

令 $x = 1 - p$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k=r}^{\infty} C_{k-1}^{r-1} (1-p)^{k-r} = \frac{1}{(1-(1-p))^r} = \frac{1}{p^r}$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k=r}^{\infty} C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r} = 1$$