# 第三章
# 二维随机变量及其分布

在实际问题中, 试验结果有时需要同时用两个或两个以上的随机变量来描述.

例如：用温度和风力来描述天气情况.

通过对含碳、含硫、含磷量的测定来研究钢的成分.

要研究这些随机变量之间的联系,就需考虑若干个随机变量, 即多维随机变量及其取值规律——多维分布.

# §3.1 二维随机变量及其联合分布

## 二维随机变量

**定义** 设Ω为随机试验的样本空间，

$$\forall \omega \in \Omega \xrightarrow{\text{一定法则}} \exists \left(X(\omega), Y(\omega)\right) \in R^2$$

则称二维向量$(X, Y)$为二维随机变量

或二维随机向量

问题：

二维随机变量作为一个整体的概率特性

其中每一个随机变量的概率特性与整体的概率特性之间的关系

## 二维随机变量的联合分布函数

**定义** 设$(X, Y)$为二维随机变量，对于任何一对实数$(x, y)$,

事件$(X \le x) \cap (Y \le y)$, 记为$(X \le x, Y \le y)$

的概率$P(X \le x, Y \le y)$

是一个二元实函数$F(x, y)$，

称为二维随机变量$(X, Y)$的分布函数，即

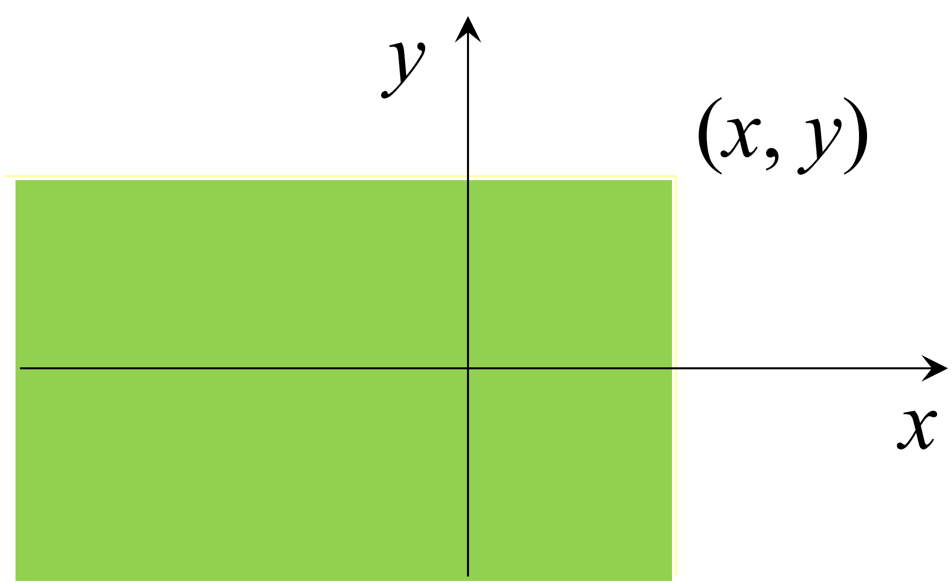
$$F(x, y) = P(X \le x, Y \le y)$$

## 分布函数的几何意义

如果用平面上的点$(x, y)$表示二维随机变量$(X,Y)$的一组可能的取值，

则$F(x, y)$ $=P(X \leq x, Y \leq y)$

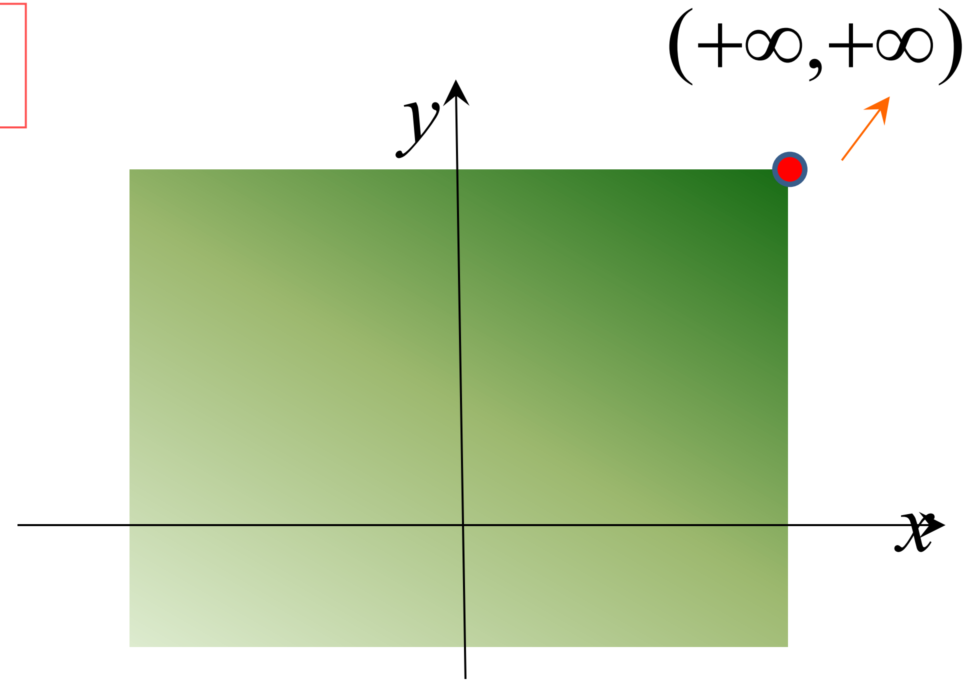
表示$(X,Y)$的取值落入下图所示的角形区域的概率



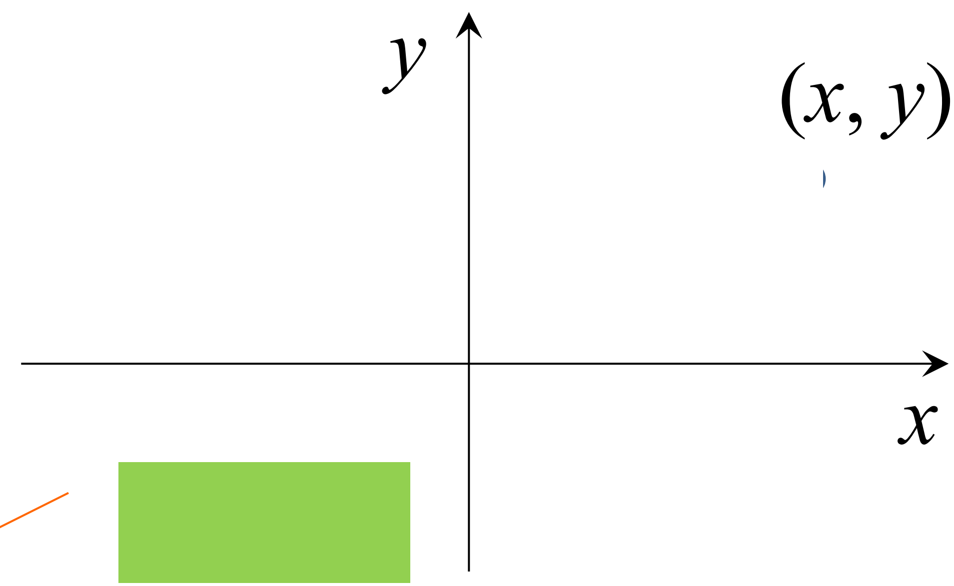
# 联合分布函数的性质

$$0 \le F(x, y) \le 1$$

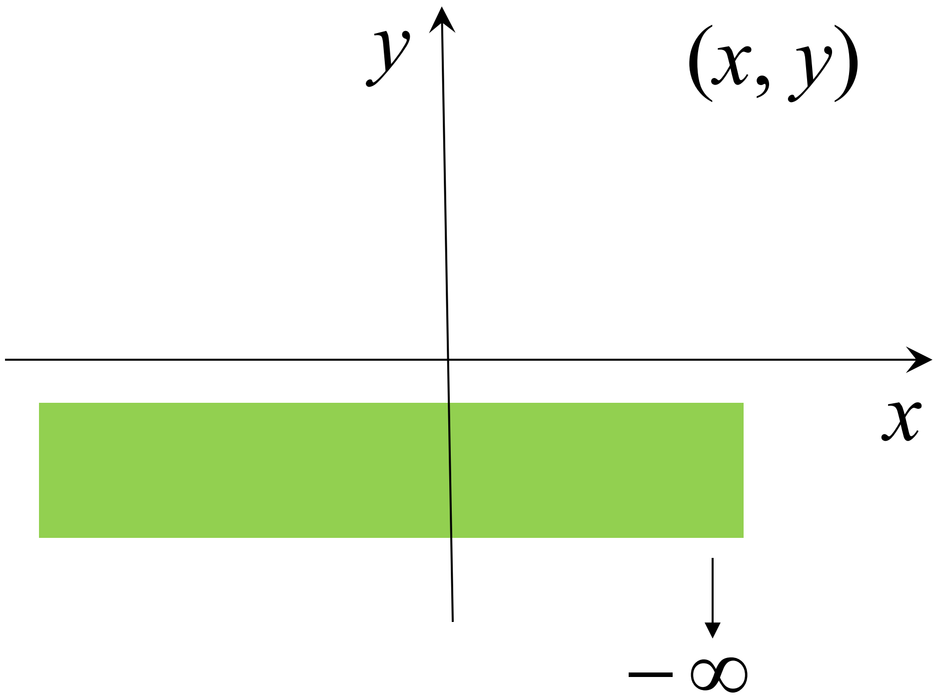
$$F(+\infty, +\infty) = 1$$



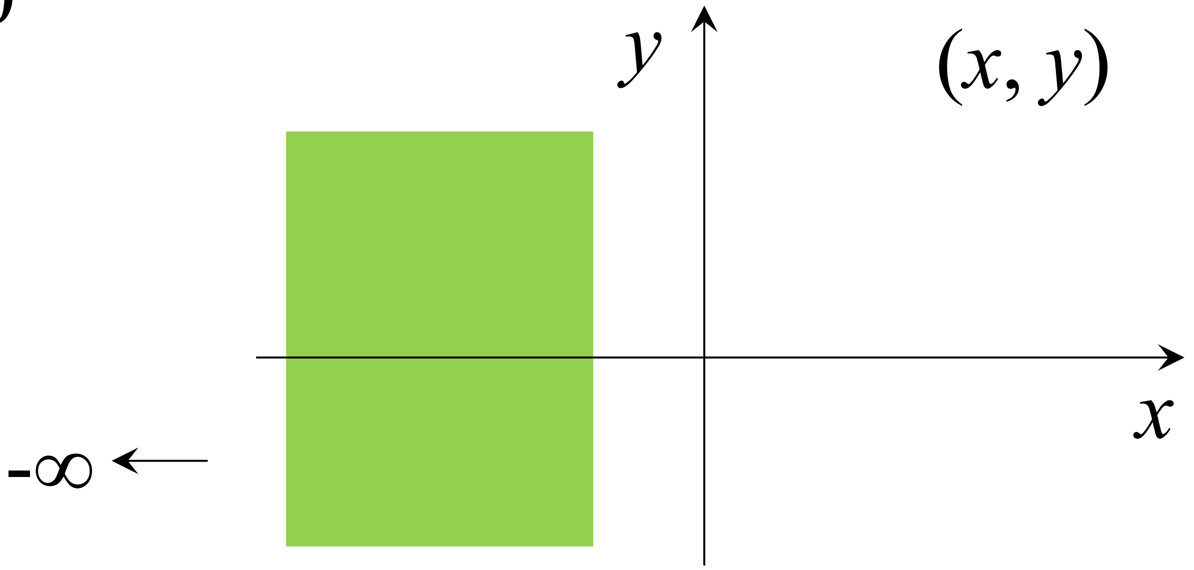

$$F(-\infty, -\infty) = 0$$



$$F(x,-\infty) = 0$$




$$F(-\infty, y) = 0$$



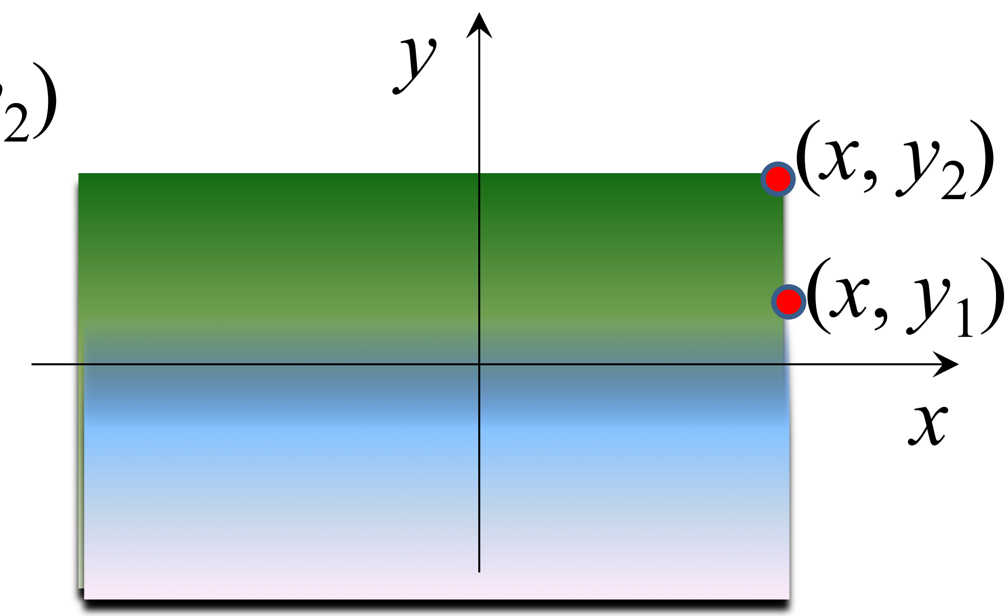
2、对每个变量单调不减

固定 $x$，对任意的 $y_1 < y_2$，$F(x,y_1) \le F(x,y_2)$

$(X \le x, Y \le y_1)$包含于$(X \le x, Y \le y_2)$

$$P(X \le x, Y \le y_1) \le P(X \le x, Y \le y_2)$$

$$F(x,y_1) \le F(x,y_2)$$




固定 $y$，对任意的 $x_1 < x_2$，$F(x_1,y) \le F(x_2,y)$

## 3、对每个变量右连续

$$F(x_0, y_0) = F(x_0 + 0, y_0)$$

$$F(x_0, y_0) = F(x_0, y_0 + 0)$$

不包含任意大于$x_0$的概率

$$F(x_0 + 0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} P(X \le x_0 + \Delta x, Y \le y_0)$$

$$= P(X \le x_0, Y \le y_0)$$

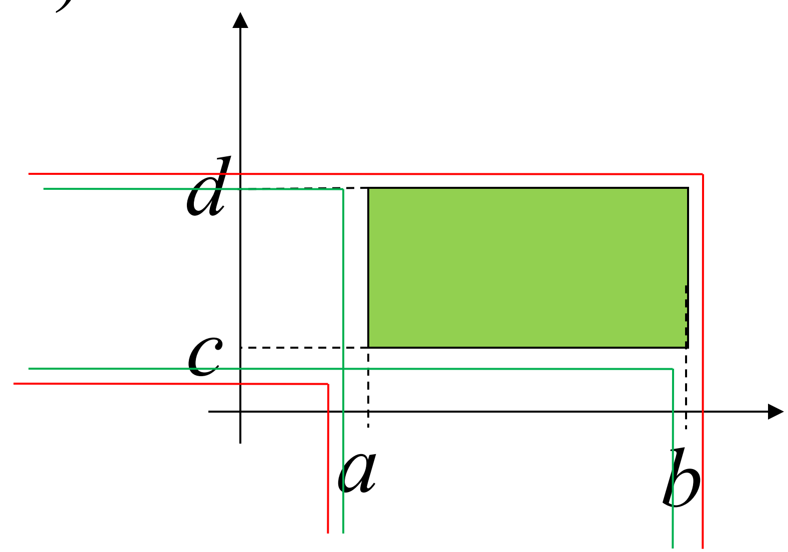
$$= F(x_0, y_0)$$

4、对于任意的$a < b$ , $c < d$

$$F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c) \geq 0$$

事实上 $F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c)$

$= P(a < X \leq b , c < Y \leq d)$




可以证明:凡满足上述性质1-4的二元函数F(x,y)必定是某个二维随机变量的分布函数.

例1 设二维随机变量(X,Y)的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}(a-e^{-2x})(b-e^{-y}),x>0,y>0\\0,\text{其它}\end{cases}$$

1、确定常数a、b

2、求P(X>0,Y≤2)

解(1) 利用分布函数的性质

$$1=F(+\infty,+\infty)\ =a\cdot b$$

$$0=\ F(0,y)=\lim_{x\to 0^+}F(x,y)\ =(a-1)(b-e^{-y})$$

由y>0的任意性,得

$$a-1=0, \quad a=1$$

所以 $a=1, b=1$

$$P(a<X\le b, c<Y\le d) = F(b,d)-F(b,c)-F(a,d)+F(a,c)$$

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y}), x>0, y>0\\ 0, \text{其它}\end{cases}$$

(2) $P\{X>0, Y\le 2\} = P\{0<X<+\infty, -\infty<Y\le 2\}$

$$=F(+\infty,2)-F(+\infty,-\infty)-F(0,2)+F(0,-\infty)$$

$$=1\cdot(1-e^{-2})-0-0-0$$

$$=1-e^{-2}$$

**例2** 设

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x+y<1\\ 1, & x+y\ge 1\end{cases}$$

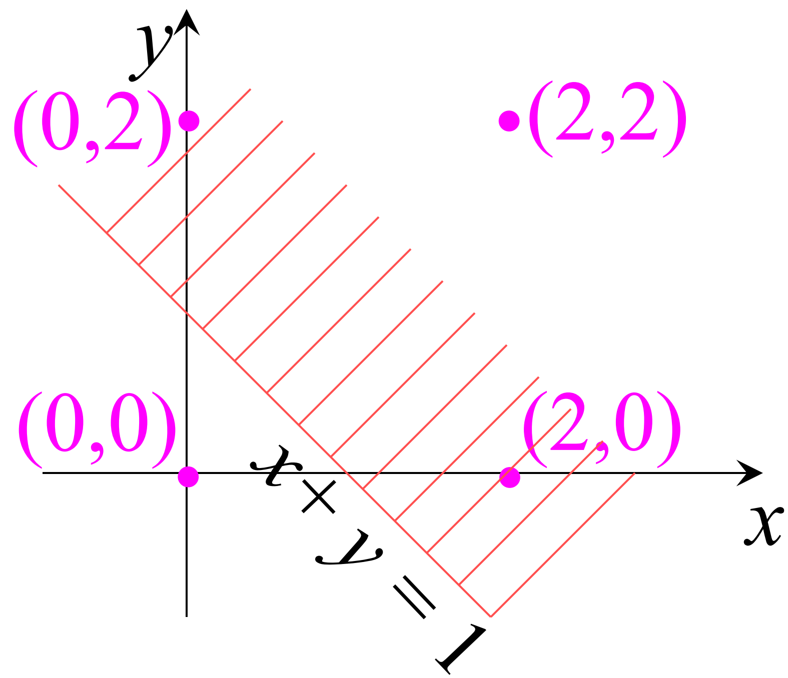
讨论$F(x,y)$能否成为二维随机变量的分布函数？

**解** $F(2,2)-F(0,2)$

$-F(2,0)+F(0,0)$

$=1-1-1+0$

$=-1$




故 $F(x,y)$不能作为二维随机变量的分布函数

注意 对于二维随机变量

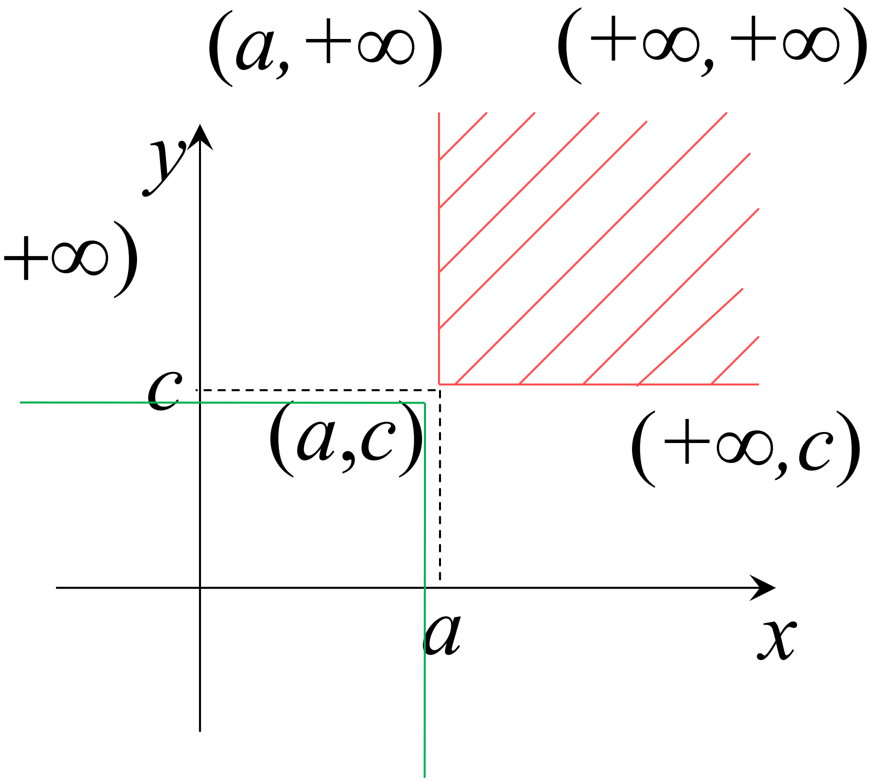
$$P(X>a,Y>c)\neq 1-F(a,c)$$

$$P(X>a,Y>c)$$

$$=P(a<X<+\infty,c<Y<+\infty)$$

$$=1-F(+\infty,c)$$

$$-F(a,+\infty)+F(a,c)$$



# 二维离散型随机变量及其概率特性

**定义** 若二维随机变量$(X,Y)$的所有可能的取值为有限多个或无穷可列多个, 则称$(X,Y)$为二维离散型随机变量.

与一维相对应，要描述二维离散型随机变量的概率特性，常用其联合分布函数和联合分布律

## 联合概率分布

设$(X,Y)$的所有可能的取值为

$$(x_i, y_j), \qquad i, j = 1,2,\cdots$$

则称

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, \qquad i, j = 1,2,\cdots$$

为二维随机变量$(X,Y)$的联合概率分布或联合分布律，也简称概率分布或分布律

| x \ y | $y_1$ | $y_2$ | $\cdots$ | $y_j$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $p_{11}$ | $p_{12}$ | $\cdots$ | $p_{1j}$ | $\cdots$ |
| $x_2$ | $p_{21}$ | $p_{22}$ | $\cdots$ | $p_{2j}$ | $\cdots$ |
| $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ |
| $x_i$ | $p_{i1}$ | $p_{2i}$ | $\cdots$ | $p_{ij}$ | $\cdots$ |
| $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ |

显然，

$$p_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, 2, \cdots$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij} = 1$$

此为基本性质

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, \qquad i, j = 1,2,\cdots$$

随机点(X,Y)落在任一区域D的概率

$$P\{(X,Y) \in D\} = \sum_{(x_i, y_j) \in D} p_{ij}$$

## 联合分布函数

$$F(x,y)$$

$$=P\{X\le x, Y\le y\}$$

$$=\sum_{(x_i,y_j)\in D} p_{ij}$$

$$=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y} p_{ij},$$

| x \ y | $y_1$ | $\cdots$ | $y_j$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $p_{11}$ | $\cdots$ | $p_{1j}$ | $\cdots$ |
| $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ |
| $x_i$ | $p_{i1}$ | $\cdots$ | $p_{ij}$ | $\cdots$ |
| $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ |

$(x,y)$

$$D=\{(-\infty,x),(-\infty,y)\}$$

由此知，已知联合分布律可以求出其联合分布函数

# 反之，已知分布函数也可以求出其联合分布律

$$
\begin{aligned}
&P(X=x_i, Y=y_j) \\
&= P(X \le x_i, Y \le y_j) - P(X < x_i, Y \le y_j) - P(X \le x_i, Y < y_j) \\
&\quad + P(X < x_i, Y < y_j) \\
&= F(x_i, y_j) - F(x_i - 0, y_j) \\
&-F(x_i, y_j - 0) + F(x_i - 0, y_j - 0)
\end{aligned}
$$

$$i, j, = 1, 2, \cdots$$

| x \ y | $y_1$ | $\cdots$ | $y_j$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $p_{11}$ | $\cdots$ | $p_{1j}$ | $\cdots$ |
| $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ |
| $x_i$ | $p_{i1}$ | $\cdots$ | $p_{ij}$ | $\cdots$ |
| $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ |

例3 甲、乙两盒内均有3只晶体管，其中甲盒内有1只正品,2只次品； 乙盒内有2只正品,1只次品.

第一次从甲盒内随机取出2只管子放入乙盒内;
第二次从乙盒内随机取出2只管子.

以X,Y分别表示第一、二次取出的正品管子的数目.

试求 (X,Y)的分布律以及 $P\{(X,Y)\in D\}$,

其中 $D:\{(x,y)\mid x^2+y^2\geq 2\}$

解：根据题意知,

X的可能取值为0,1;

Y的可能取值为0,1,2.

(X,Y)的可能取值为：

(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2).

| x \ y | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | | | |
| 1 | | | |

$\{X=0\}$表示从甲盒内取出2只次品管子放入乙盒内, 此时乙盒内有2只正品,3只次品,

利用乘法公式可得

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}\cdot P\{Y=0\mid X=0\}$$

$$=\frac{C_2^2}{C_3^2}\cdot\frac{C_3^2}{C_5^2}\quad=\frac{3}{30}$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P\{X=0\}\cdot P\{Y=1\mid X=0\}$$

$$=\frac{C_2^2}{C_3^2}\cdot\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}\quad=\frac{6}{30}$$

$$P\{X=0,Y=2\}=P\{X=0\}\cdot P\{Y=2\mid X=0\}$$

$$=\frac{C_2^2}{C_3^2}\cdot\frac{C_2^2}{C_5^2}\quad=\frac{1}{30}$$

$\{X=1\}$表示从甲盒内取出1只正品和1只次品管子放入乙盒内,此时乙盒内有3只正品,2只次品,

利用乘法公式可得

$$P\{X=1,Y=0\}=P\{X=1\}\cdot P\{Y=0\mid X=1\}$$

$$=\frac{C_1^1C_2^1}{C_3^2}\cdot\frac{C_2^2}{C_5^2}\quad=\frac{2}{30}$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}\cdot P\{Y=1\mid X=1\}$$

$$=\frac{C_1^1C_2^1}{C_3^2}\cdot\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}=\frac{12}{30}$$

$$P\{X=1,Y=2\}=P\{X=1\}\cdot P\{Y=2\mid X=1\}$$

$$=\frac{C_1^1C_2^1}{C_3^2}\cdot\frac{C_3^2}{C_5^2}\quad=\frac{6}{30}$$

于是得(X,Y)的分布律为

| x \ y | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{3}{30}$ | $\frac{6}{30}$ | $\frac{1}{30}$ |
| 1 | $\frac{2}{30}$ | $\frac{12}{30}$ | $\frac{6}{30}$ |

$$D:\{(x,y)\mid x^2+y^2\geq 2\}$$

$$P\{(X,Y)\in D\}$$

$$=P\{X=0,Y=2\}$$

$$+P\{X=1,Y=1\}+P\{X=1,Y=2\}$$

$$=\frac{1}{30}+\frac{12}{30}+\frac{6}{30}=\frac{19}{30}$$