二维连续型随机变量及其联合分布

定义 设二维随机变量(X,Y)的分布函数为$F(x,y)$,若存在非负可积函数$f(x,y)$,使得对于任意实数x,y有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dvdu$$

则称(X,Y)为二维连续型随机变量，$f(x,y)$为(X,Y)的联合密度函数

简称为联合密度或概率密度

联合密度与联合分布函数的性质

基本性质：

1、 $f(x,y)\geq 0$

2、 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dydx = 1$

反之,可以证明,若二元函数 $f(x,y)$ 满足上面两条基本性质,那么它一定是某个二维随机变量求 (X,Y) 的概率密度.

引申性质：

3、 $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dvdu$

是连续函数；

对每个变元连续，在联合密度的连续点处

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=f(x,y)$$

此时，

$$P(x < X \le x + \Delta x, y < Y \le y + \Delta y)$$

$$= F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y)$$

$$- F(x, y + \Delta y) + F(x, y)$$

$$\approx \int_{-\infty}^{x+\Delta x} f(u, y)\Delta y du \quad - \int_{-\infty}^{x} f(u, y)\Delta y du$$

$$\approx f(x, y)\Delta y \Delta x$$

由此，$f(x, y)$ 反映了(X, Y) 在(x,y) 附近单位面积的区域内取值的概率

$$P(x < X \le x + \Delta x, y < Y \le y + \Delta y) \approx f(x, y)\Delta x \Delta y$$

$$P(x < X \le x + \Delta x, y < Y \le y + \Delta y)$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta x_i \Delta y_i$$

$$= \int_x^{x+\Delta x} \int_y^{y+\Delta y} f(x, y) dy dx$$

故有， $P\{a < X \le b, c < Y \le d\} = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$

事实上，

4、若 G 是平面上的区域，则

$$P((X,Y)\in G)=\iint_G f(x,y)\,dxdy$$

另外，

$$P(X=a,Y=b)=0=P((X,Y)=(a,b))$$

$$P(X=a,-\infty<Y<+\infty)=0$$

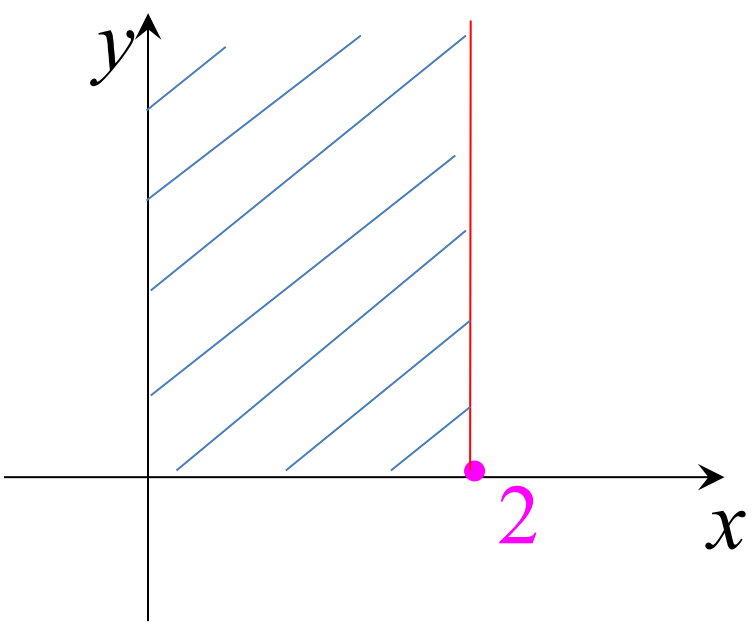
$$P(-\infty<X<+\infty,Y=a)=0$$

例1 设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases} ae^{-2y}, 0\le x\le 2, y>0 \\ 0, \text{其它} \end{cases}$$

(1)确定常数a　(2)求分布函数F(X,Y)

(3)求P{Y≤X}

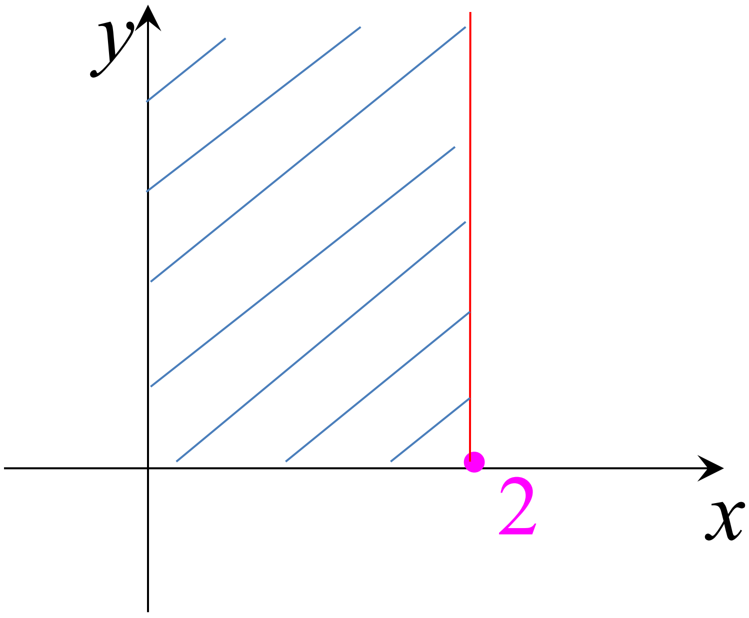


解（1）由概率密度的性质

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_{0}^{2}dx\int_{0}^{+\infty}ae^{-2y}dy$$

$$=2a(-\frac{1}{2}e^{-2y})\Big|_{0}^{+\infty}=2a\cdot\frac{1}{2}=a$$

即得a=1

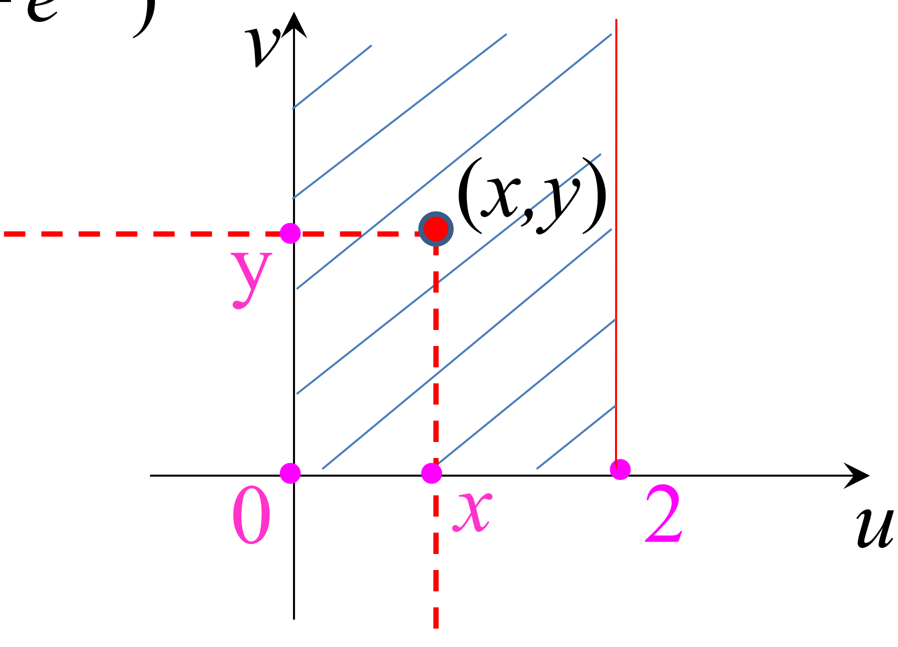


（2） $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv$

（A）当0≤x≤2,y>0时，

$$F(x,y)=\int_{0}^{x} du\int_{0}^{y} e^{-2v}dv$$

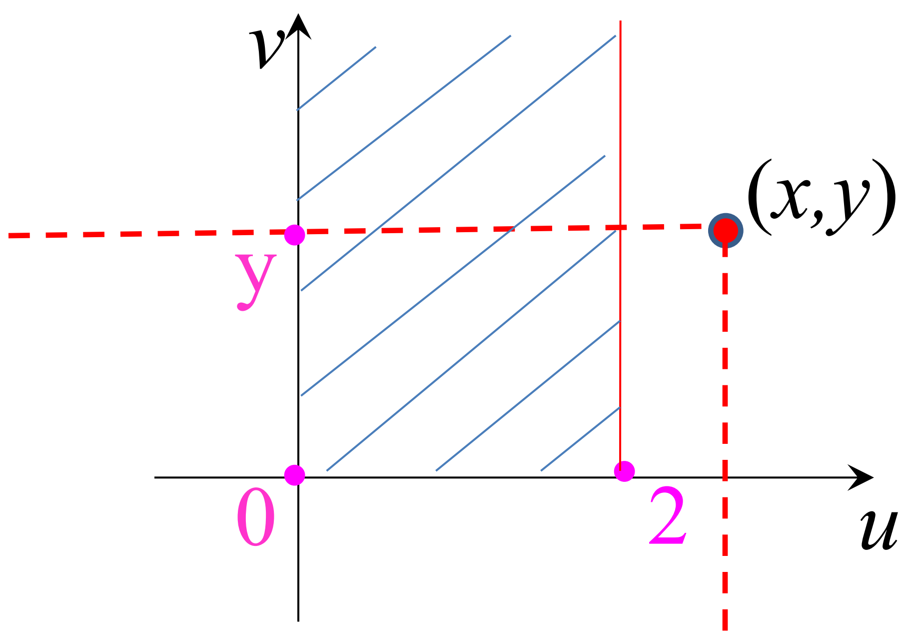
$$=x(-\frac{1}{2}e^{-2v})\Big|_{0}^{y}=\frac{x}{2}(1-e^{-2y})$$



(B）当x>2,y>0时，

$$F(x,y)=\int_0^2 du\int_0^y e^{-2v}dv$$

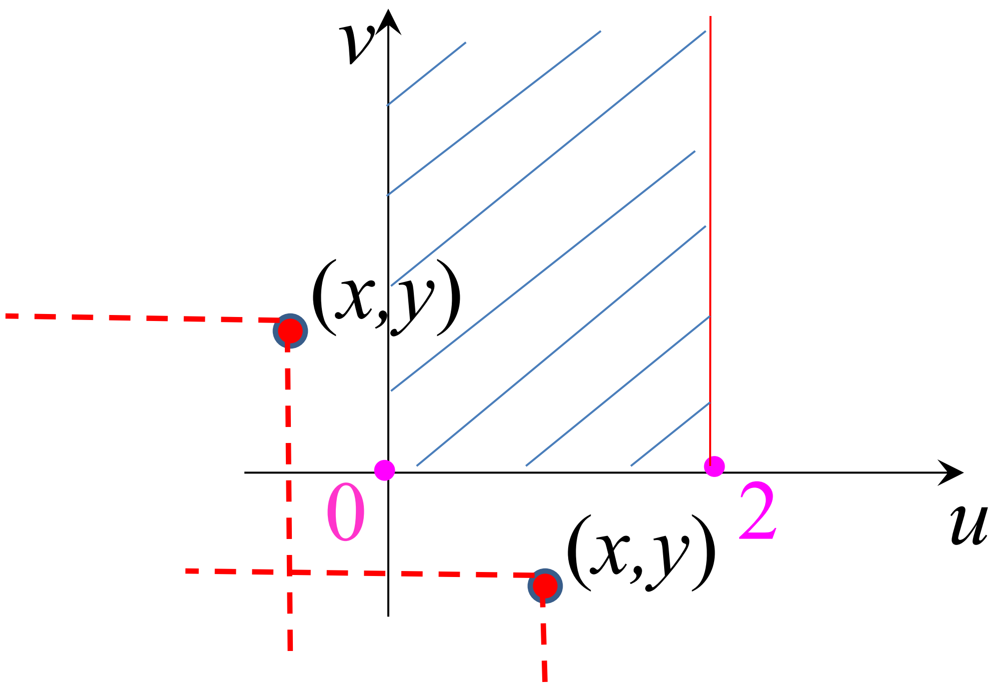
$$=2(-\frac{1}{2}e^{-2v})\Big|_0^y=(1-e^{-2y})$$



(C) 当x<0或y≤0时，

对$u \le x, v \le y$有$f(u, v)=0$

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv=0$$



于是得所求分布函数

$$F(x,y)=\begin{cases}\frac{x}{2}(1-e^{-2y}),0\le x\le 2,y>0\\(1-e^{-2y}),x>2,y>0\\0,\text{其它}\end{cases}$$

（3）设D={(x,y)|y≤x}

$$D_1=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2,0\le y\le x\}$$

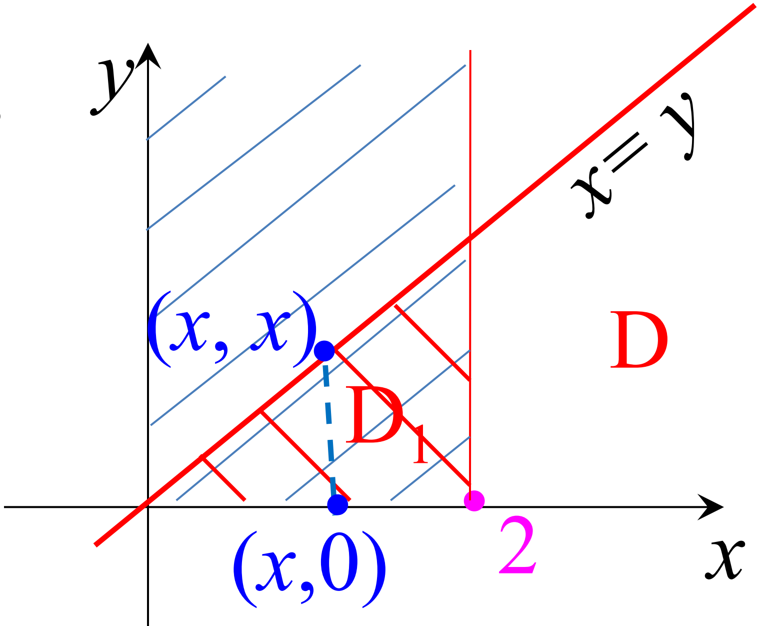
$$P\{Y\le X\}=P\{(X,Y)\in D\}$$

$$=\iint_D f(x,y)dxdy$$

$$=\iint_{D_1} f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^2 dx\int_0^x e^{-2y}dy$$

$$=\int_0^2 \frac{1}{2}(1-e^{-2x})dx$$



$$= \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}e^{-2x})\Big|_0^2$$

$$= \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{2}e^{-4} - \frac{1}{2})$$

$$= \frac{1}{4}(3 + e^{-4})$$

常见的连续型二维随机变量的分布

二维均匀分布

设区域G是平面上的有界区域，其面积为$A\ (>0)$

若二维随机变量(X,Y)的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A}, & (x,y)\in G\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

则称(X,Y)服从区域G上的均匀分布

记作$(X,Y)\sim U(G)$

若(X,Y)服从区域G上的均匀分布, 则

$\forall\ G_1 \subseteq G$, 设G_1的面积为A_1,

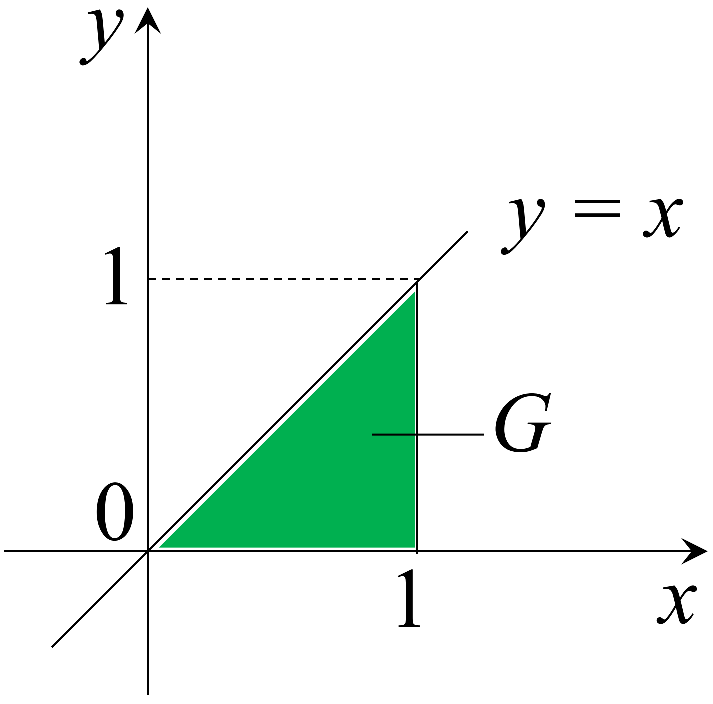
$$P\big((X,Y)\in G_1\big)=\frac{A_1}{A}$$

例2 设$(X, Y) \sim G$上的均匀分布，其中

$$G = \{(x, y) \mid 0 \le y \le x, 0 \le x \le 1\}$$

(1)求$f(x, y)$；(2)求$P(Y > X^2)$；

(3)求(X ,Y) 在平面上的落点到y 轴距离小于0.3的概率



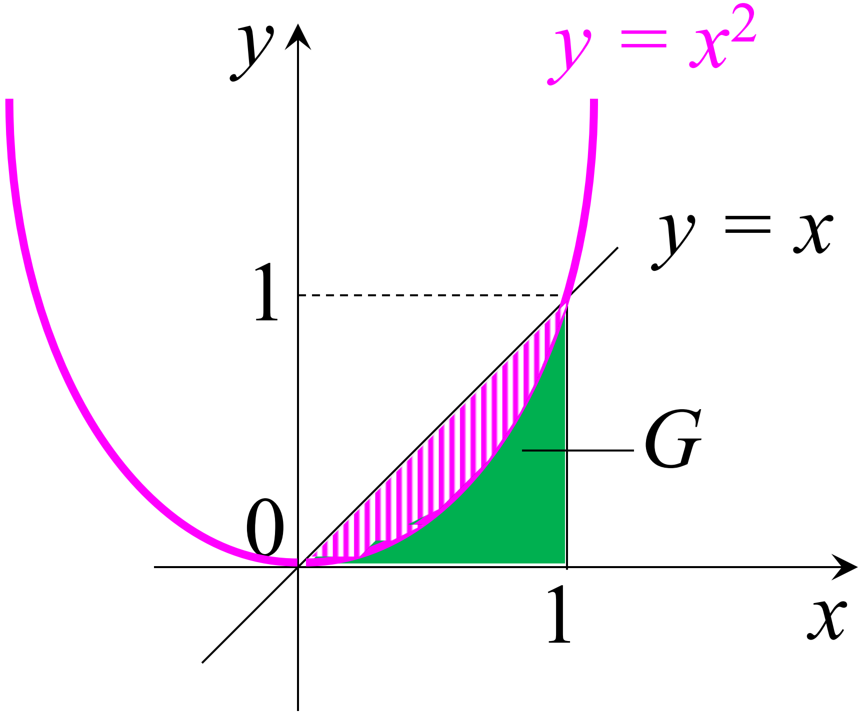
解 (1) $G=\{(x,y)\mid 0\le y\le x, 0\le x\le 1\}$

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0\le y\le x, 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(2) $P(Y>X^2)$

$$=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} 2dy$$

$$=\frac{1}{3}$$

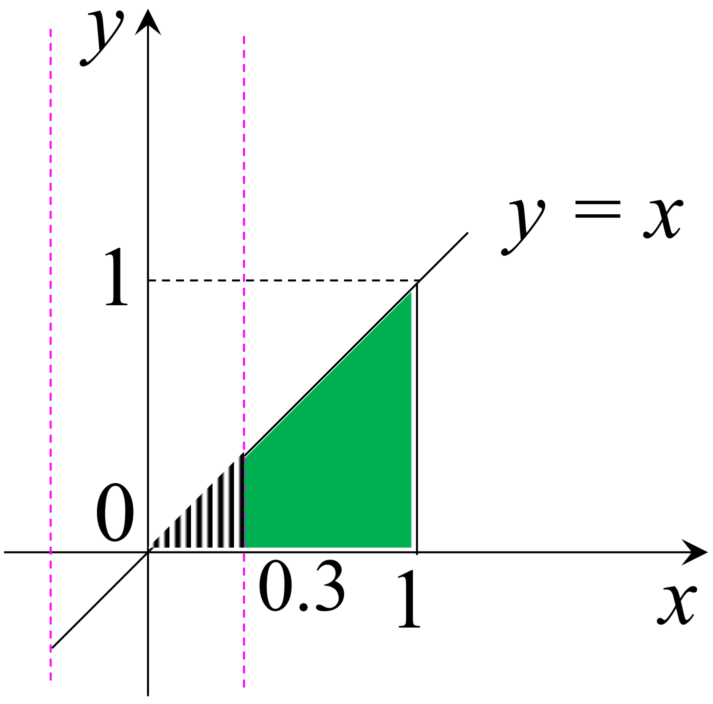


(3)

$$P(|X| < 0.3)$$

$$= P(-0.3 < X < 0.3)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (0.3)^2 = 0.09$$



二维正态分布

若二维随机变量(X,Y)的联合密度为

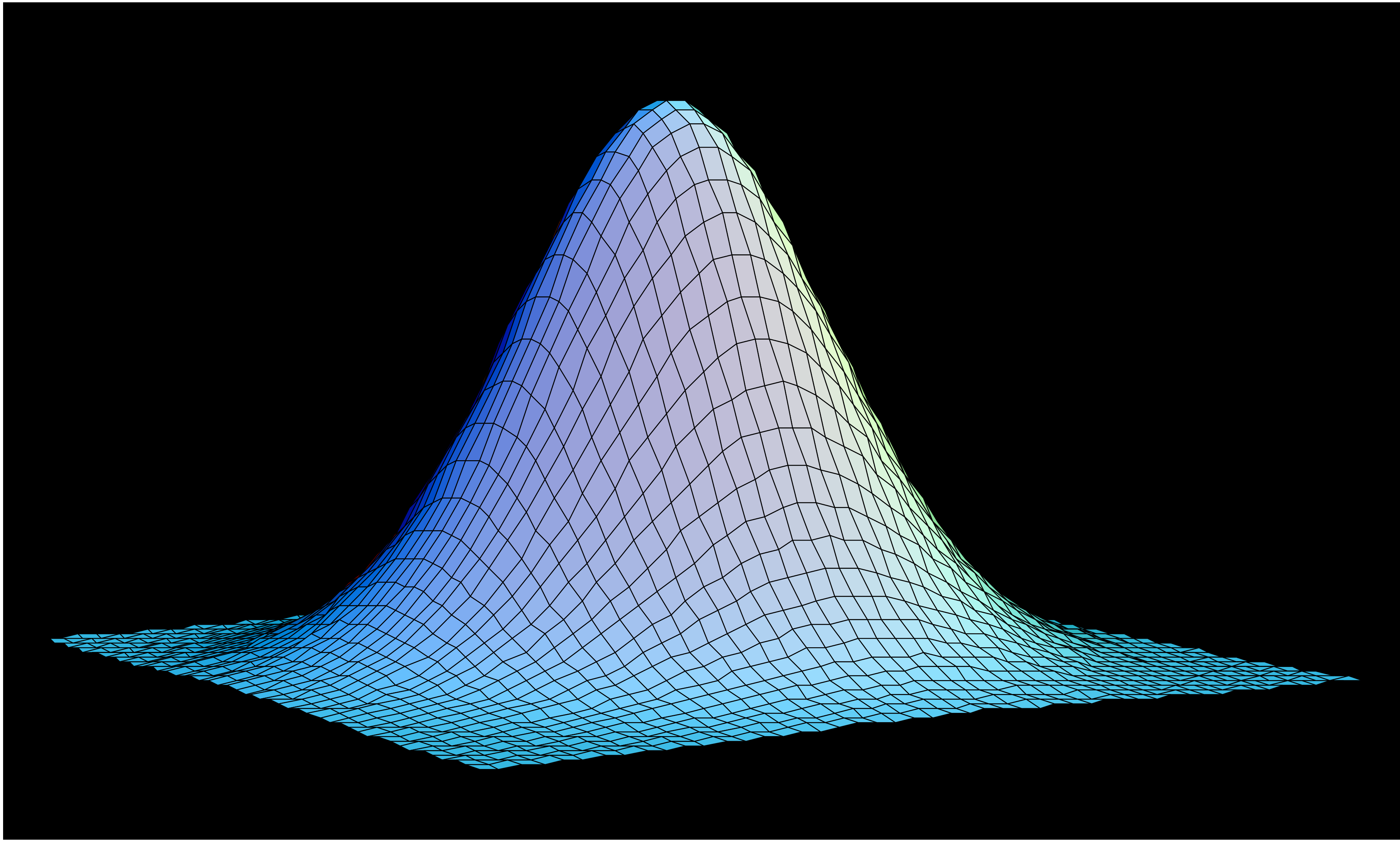
$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot$$

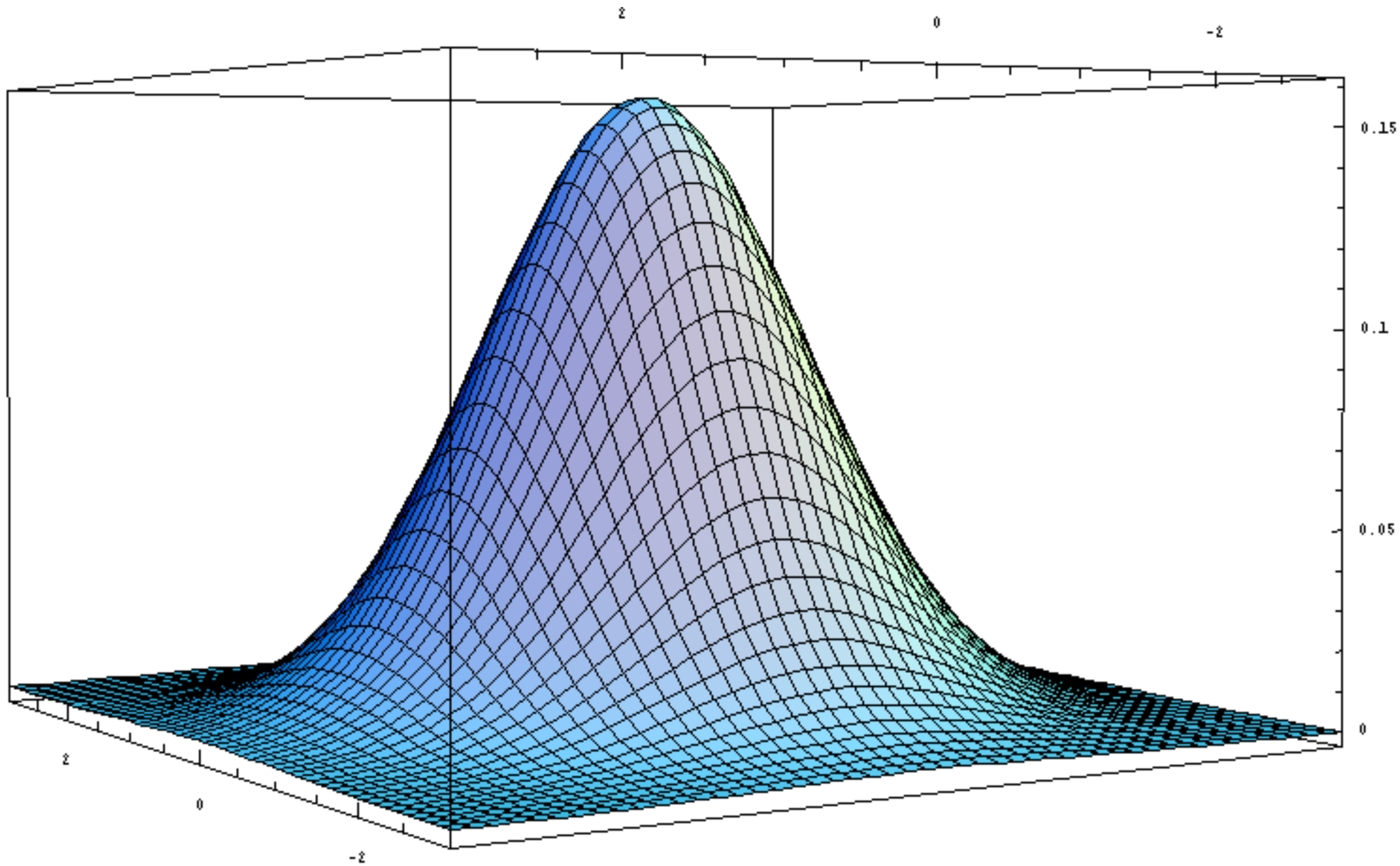
$$e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

则称(X,Y)服从参数为$\mu_1,\sigma_1^2,\mu_2,\sigma_2^2,\rho$的正态分布，记作$(X,Y)\sim \mathrm{N}(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$

其中$\sigma_1,\sigma_2>0$, $-1<\rho<1$





2
0
-2
0.15
0.1
0.05
0
2
0
-2

令

$$B = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

则B 为正定矩阵，且

$$|B| = (1-\rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2$$

$$B^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sigma_1^2} & -\dfrac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ -\dfrac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \dfrac{1}{\sigma_2^2} \end{pmatrix}$$

则

$$f(x,y)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2\,|B|^{\frac{1}{2}}}\,e^{-\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}x-\mu_1 & y-\mu_2\end{pmatrix}B^{-1}\begin{pmatrix}x-\mu_1\\ y-\mu_2\end{pmatrix}\right]}$$

二维随机变量的边缘分布函数

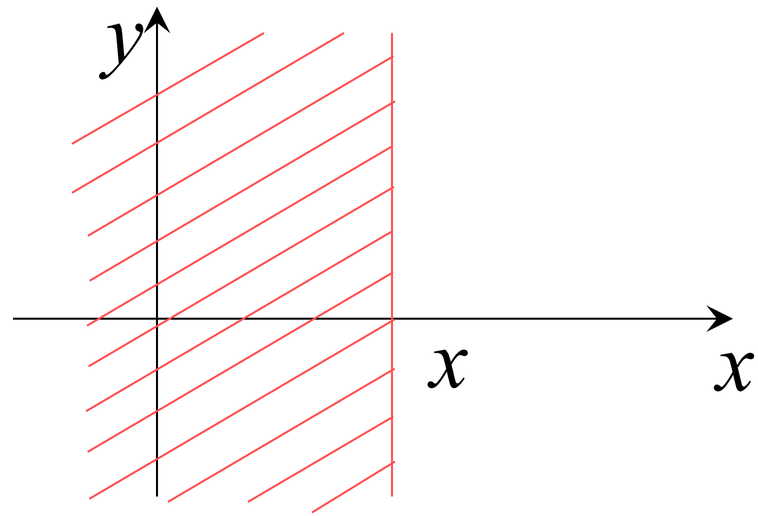
(X,Y)关于某一分量X或Y边缘分布函数指X或Y作为一元随机变量时的分布函数，即：

$$F_X(x) = P(X \le x)$$

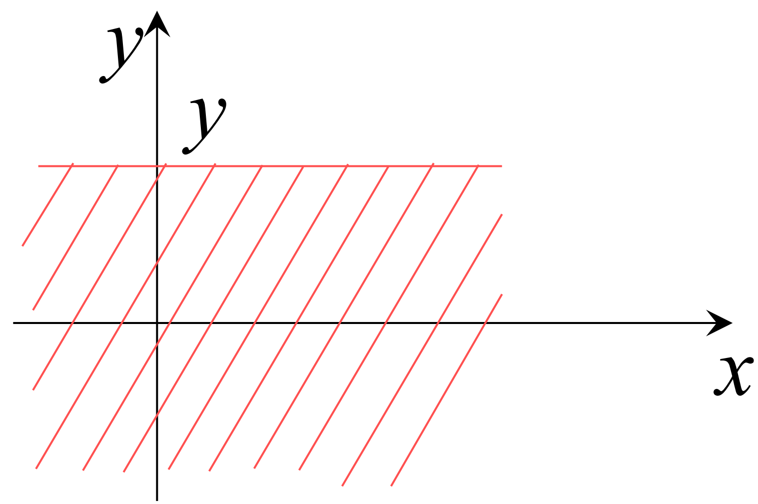
$$F_Y(y) = P(Y \le y)$$

由联合分布函数可以求得边缘分布函数,逆不真.

$$F_X(x) = P(X \le x)$$
$$= P(X \le x, Y < +\infty)$$
$$= F(x, +\infty)$$



$$F_Y(y) = P(Y \le y)$$
$$= P(X < +\infty, Y \le y)$$
$$= F(+\infty, y)$$



例3 设二维随机变量(X,Y)的联合分布函数为

$$F(x,y)=A\left(B+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(C+\arctan\frac{y}{2}\right)$$

$$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

其中A,B,C为常数.

(1) 确定A,B,C；

(2) 求X和Y的边缘分布函数；

(3) 求$P(X>2)$

解 (1) $F(+\infty,+\infty)=A\left(B+\frac{\pi}{2}\right)\left(C+\frac{\pi}{2}\right)=1$

$$F(-\infty,+\infty)=A\left(B-\frac{\pi}{2}\right)\left(C+\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$F(+\infty,-\infty)=A\left(B+\frac{\pi}{2}\right)\left(C-\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$\Rightarrow$ $B=\frac{\pi}{2}, C=\frac{\pi}{2}, A=\frac{1}{\pi^2}$

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{2}\right)$$

(2) $F_X(x)=F(x,+\infty)$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{2}, \qquad -\infty<x<+\infty,$$

$$F_Y(y) = F(+\infty, y)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\frac{y}{2}, \qquad -\infty < y < +\infty,$$

(3) $P(X > 2) = 1 - P(X \le 2)$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\frac{2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}$$

可以将二维随机变量及其边缘分布函数的概念推广到 n 维随机变量及其联合分布函数与边缘分布函数

例4 设二维连续型随机变量(X,Y)的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} kxy, & 0\le x\le y, 0\le y\le 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中k为常数. 求

(1)常数k;

(2) $P(X+Y\ge 1)$, $P(X<0.5)$;

(3) 联合分布函数$F(x,y)$;

(4) 边缘密度函数与边缘分布函数

$$f(x,y)=\begin{cases} kxy, & 0\le x\le y, 0\le y\le 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

解 令 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le y,\ 0\le y\le 1\}$

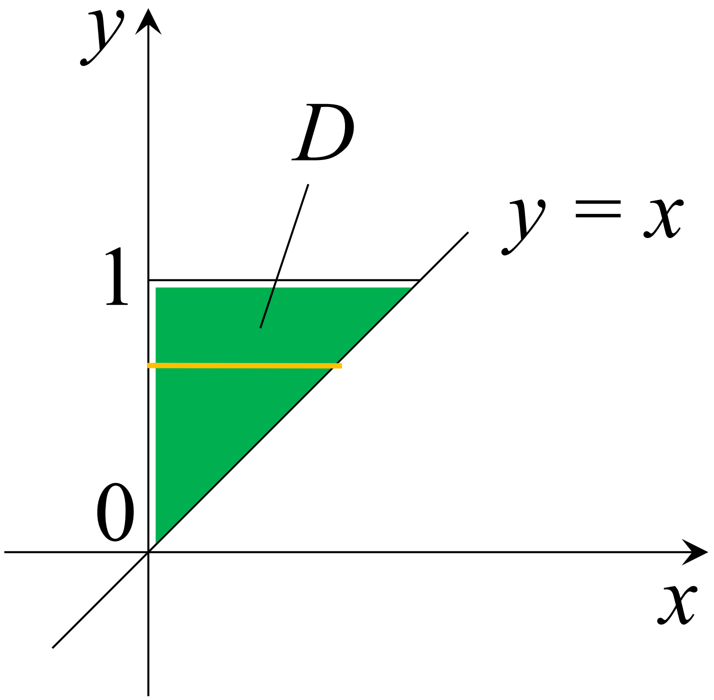
(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy=1$

⟹ $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=1$

$\int_0^1 dy\int_0^y kxy\,dx$

$=k\int_0^1 y\dfrac{y^2}{2}dy=\dfrac{k}{8}=1$

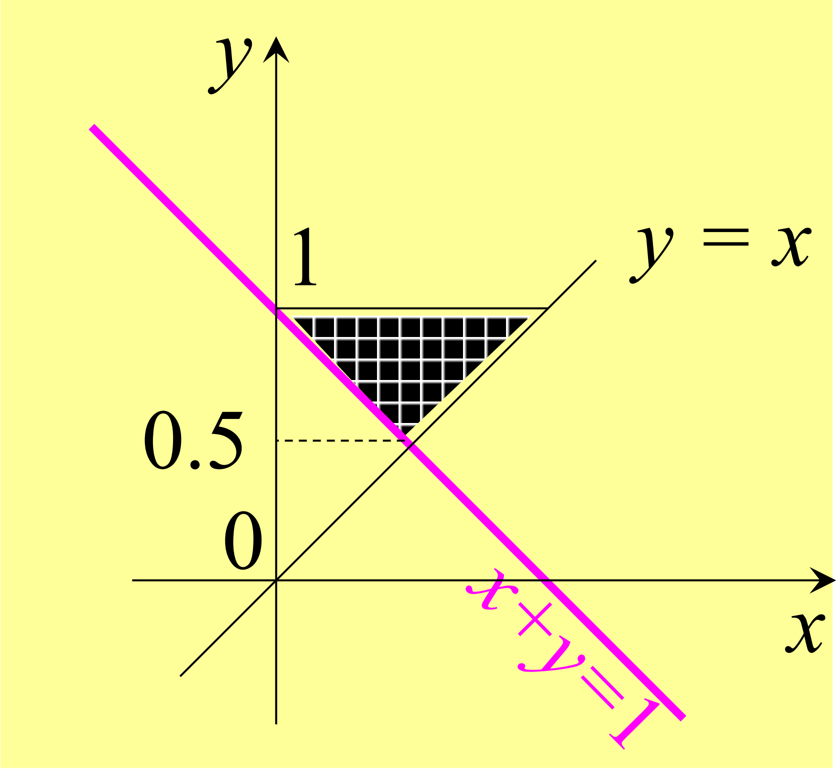
⟹ $k=8$

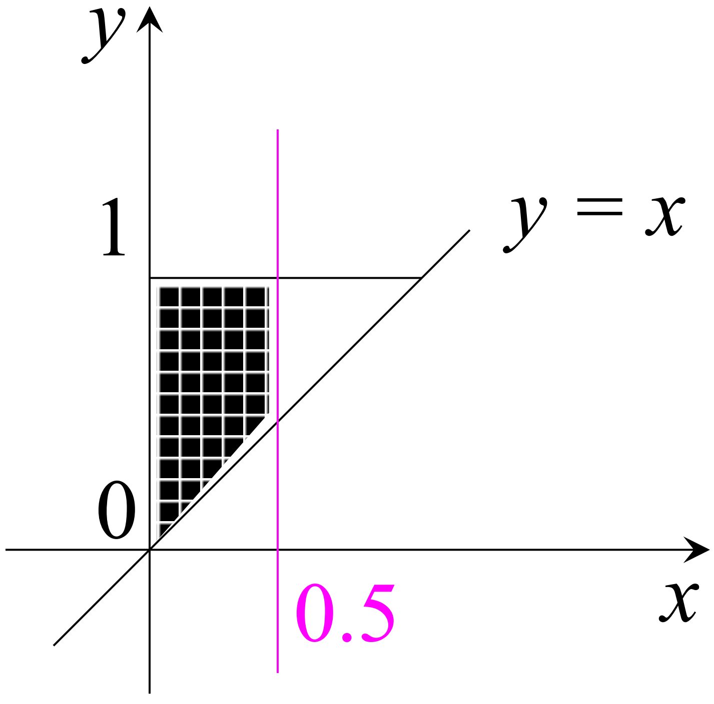


(2) $P(X+Y \geq 1)$

$$= \int_{0.5}^{1} dy \int_{1-y}^{y} 8xy\,dx$$

$$= \frac{5}{6}$$





$P(X < 0.5)$

$$= \int_{0}^{0.5} dx \int_{x}^{1} 8xy\,dy$$

$$= \frac{7}{16}$$

(3) $F(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu$

当 $x < 0$ 或 $y < 0$ 时，

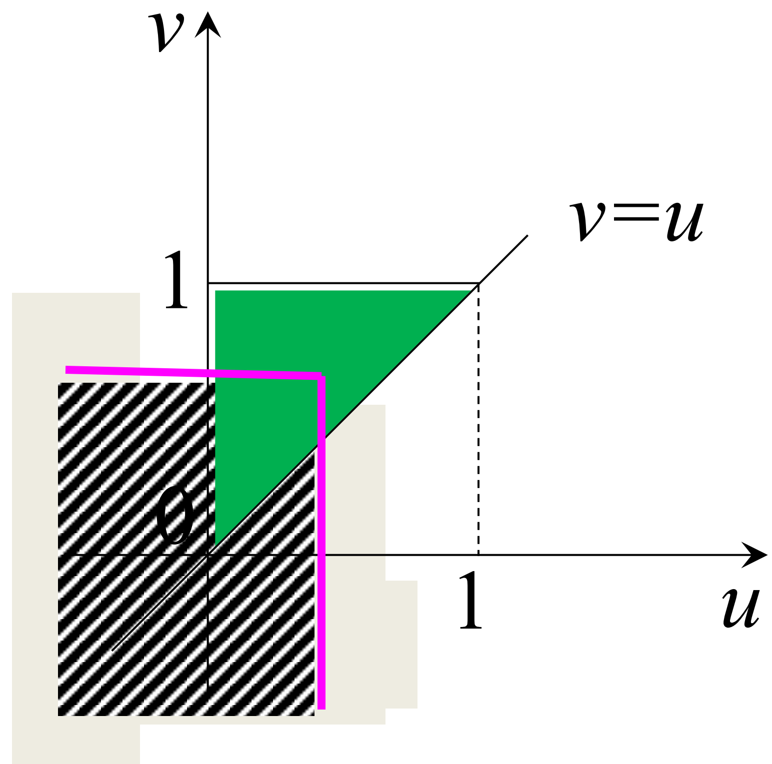
$F(x,y) = 0$

当 $0 \le x < 1$

$0 \le y < x$ 时，

$F(x,y)$

$= \int_0^y dv \int_0^v 8uvdu = y^4$



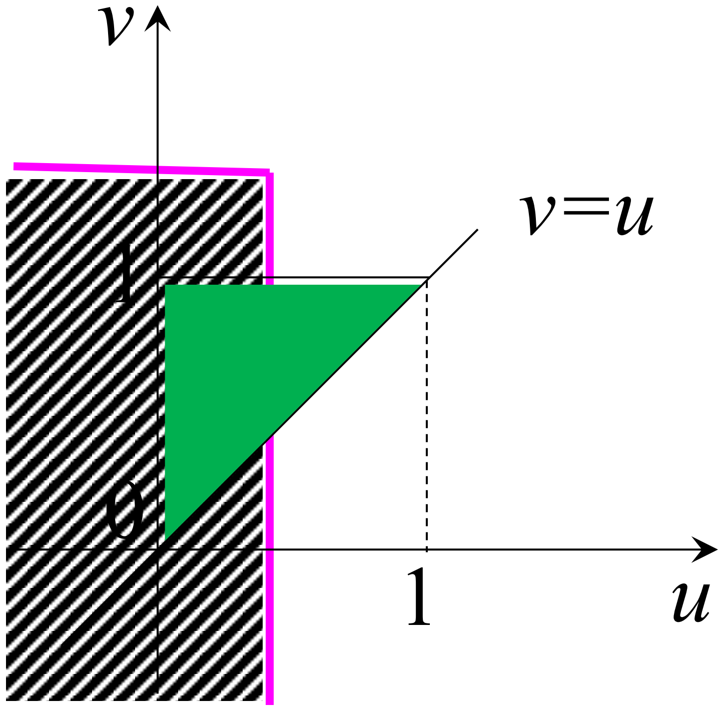
当 $0 \le x < 1,\ x \le y < 1$ 时，

$F(x,y) = \int_0^x du \int_u^y 8uvdv = 2x^2y^2 - x^4$

当 $0 \le x < 1, y \ge 1$ 时，

$$F(x, y) = \int_0^x du \int_u^1 8uv dv$$

$$= 2x^2 - x^4$$



当 $x \geq 1$

$0 \leq y < 1$ 时，

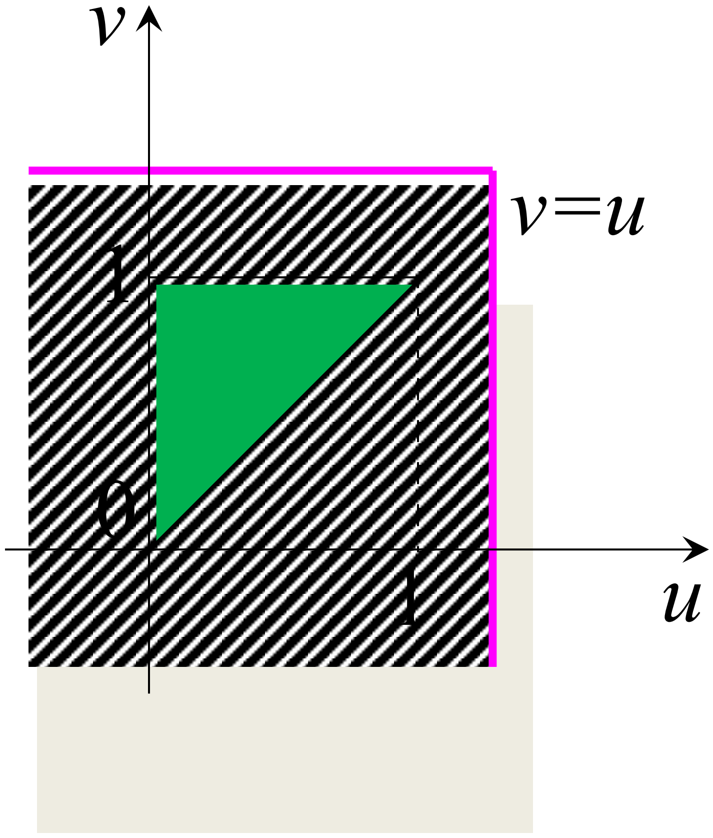
$F(x,y)$

$= \int_0^y dv \int_0^v 8uvdu = y^4$

当 $x \geq 1$

$y \geq 1$ 时，

$F(x,y) = 1$



$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & x<0 \text{ 或 } y<0 \\ y^4, & 0\le x<1,\ 0\le y<x\ , \\ 2x^2y^2-y^4, & 0\le x<1,\ x\le y<1\ , \\ 2x^2-x^4, & 0\le x<1,\ y\ge 1\ , \\ y^4, & x\ge 1,\ 0\le y<1\ , \\ 1, & x\ge 1,\ y\ge 1\ , \end{cases}$$

(4) $$F_X(x)=F(x,+\infty)$$

$$=\begin{cases} 0, & x<0\ , \\ 2x^2-x^4\ , & 0\le x<1, \\ 1, & x\ge 1 \end{cases}$$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)$$

$$=\begin{cases} 0, & y<0 \\ y^4\ , & 0\le y<1, \\ 1\ , & y\ge 1 \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x - 4x^3, & 0 \le x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 4y^3, & 0 \le y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

常见二维随机变量边缘分布函数性质

1、边平行于坐标轴的矩形域上的均匀分布的边缘分布仍为均匀分布

2、正态分布的边缘分布仍为正态分布：

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}, -\infty < x < +\infty$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}, -\infty < y < +\infty$$