二维随机变量的 条件分布

——将条件概率的概念推广到随机变量

二维离散型随机变量的条件分布律

x \ y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	$p_{i\bullet}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1n}	$p_{1\bullet}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2n}	$p_{2\bullet}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\cdots$	p_{mn}	$p_{m\bullet}$
$p_{\bullet j}$	$p_{\bullet 1}$	$p_{\bullet 2}$	$\cdots$	$p_{\bullet n}$	

$$P(Y = y_j \mid X = x_i)$$

$$= \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)}$$

$$= \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}$$

设已知二维离散型随机变量(X,Y)的概率分布

$$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}, \quad i,j=1,2,\cdots$$

若 $p_{i\bullet}=P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}>0$

则称 $P(Y=y_j \mid X=x_i)$

$$=\frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(X=x_i)}=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}} \qquad j=1,2,\cdots$$

为在 $X=x_i$ 的条件下，Y 的条件分布律

若 $$p_{\bullet j} = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} > 0,$$

则称 $$\frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}} \overset{\text{记作}}{=} P(X = x_i | Y = y_j)$$

$$i = 1, 2, \cdots$$

为在 $Y = y_j$ 的条件下，X 的条件分布律

故有 $$P(X = x_i, Y = y_j)$$

$$= P(X = x_i) P(Y = y_j | X = x_i)$$

或

$$= P(Y = y_j) P(X = x_i | Y = y_j)$$

$$i, j = 1, 2, \cdots$$

类似于乘法公式

例1 把三个球等可能地放入编号为1，2，3 的三个盒子中，每盒容纳的球数无限. 记 X 为落入 1 号盒的球数，Y 为落入 2 号盒的球数，求

(1) (X, Y) 的联合分布律与边缘分布律；

(2) $P(X=i \mid Y=0)$与 $P(Y=j \mid X=2)$;

解 (1)在§3.1已计算过

(X, Y) 的联合分布律：

$Y \backslash X$ (p_{ij})	0	1	2	3	$p_{\bullet j}$
0	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{8}{27}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{2}{9}$
3	$\frac{1}{27}$	0	0	0	$\frac{1}{27}$
$p_{i\bullet}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$	1

(X, Y)的边缘分布律

X	0	1	2	3
$P(X=i)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

Y	0	1	2	3
$P(Y=i)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

(X, Y)的条件分布律

$P(X=i \mid Y=0)$与$P(Y=j \mid X=2)$

Y \ p_{ij} \ X	0	1	2	3	$p_{\bullet j}$
0	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{8}{27}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{2}{9}$
3	$\frac{1}{27}$	0	0	0	$\frac{1}{27}$
$p_{i\bullet}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$	1

X	0	1	2	3
$P(X=i \mid Y=0)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y	0	1
$P(Y=j \mid X=2)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

当然，也可由问题的意义知

$$P(X=i|Y=j)=C_{3-j}^{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-j-i}\quad i=0,\cdots,3-j$$

$$j=0,\cdots,3$$

X	0	1	2	3
$P(X=i\|Y=0)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$P(Y=j \mid X=i)=C_{3-i}^{j}\left(\frac{1}{2}\right)^{j}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-i-j} \quad j=0,\cdots,3-i$$

$$i=0,\cdots,3$$

Y	0	1
$P(Y=j \mid X=2)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

例2 一射手进行独立射击, 已知每次他击中目标的概率为 $p\,(0 < p < 1)$, 射击一直进行到击中两次目标为止.

令X 表示他首次击中目标所进行射击的次数, Y 表示他总共进行射击的次数.

求 X 和 Y 的联合分布律、条件分布律和边缘分布律.

解 $(X = m, Y = n)$ 表示：

前 $m-1$ 次没有击中目标，第m 次击中目标，m+1到$n-1$ 次没有击中目标，第n 次击中目标，

故联合分布律为

$$P(X=m,Y=n)=(1-p)^{m-1}p(1-p)^{(n-1)-m}p$$

$$=p^2(1-p)^{n-2}$$

$$m=1,2,\cdots,n-1;\ n=2,3,\cdots$$

或 $(m=1,2,\cdots;\ n=m+1,m+2,\cdots)$

边缘分布律为

$$P(X=m)=\sum_{n=m+1}^{\infty} p^2(1-p)^{n-2}$$

$$=\frac{p^2(1-p)^{m-1}}{1-(1-p)}=p(1-p)^{m-1}$$

$$m=1,2,\cdots$$

$$P(Y=n)=\sum_{m=1}^{n-1} p^2(1-p)^{n-2}$$

$$=(n-1)p^2(1-p)^{n-2}$$

$$n=2,3,\cdots$$

条件分布律为

对每个n，$(n=2,3,\cdots)$

$$P(X=m \mid Y=n)=\frac{P(X=m,Y=n)}{P(Y=n)}$$

$$=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}}$$

$$=\frac{1}{n-1}$$

$$m=1,2,\cdots,n-1$$

对每个m, $(m=1,2,\cdots)$

$$P(Y=n \mid X=m)=\frac{P(X=m,Y=n)}{P(X=m)}$$

$$=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{p(1-p)^{m-1}}$$

$$=p(1-p)^{n-m-1}$$

$$n=m+1,m+2,\cdots$$

二维连续型随机变量的条件分布函数和条件密度函数

设二维连续型随机变量(X,Y)的

联合分布函数为$F(x,y)$,

联合密度函数为$f(x,y)$

X的边缘分布函数为$F_X(x)$,

边缘密度函数为$f_X(x)$

Y的边缘分布函数为$F_Y(y)$,

边缘密度函数为$f_Y(y)$

$$F_{X|Y}(x \mid y) = P(X \le x \mid Y = y)$$

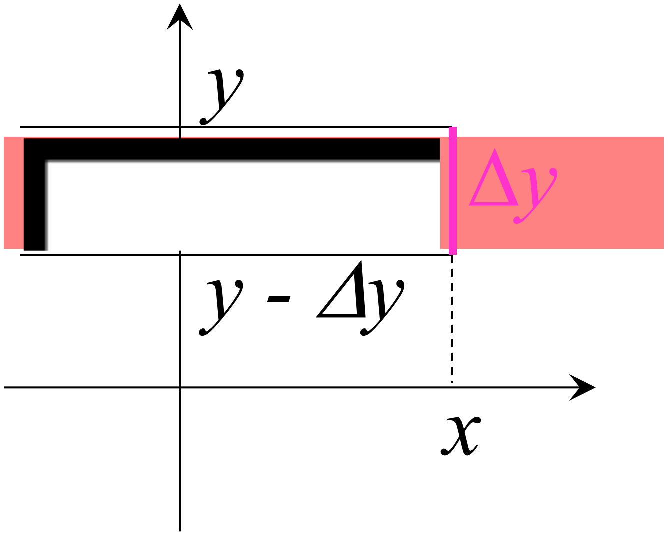
$$= \frac{P(X \le x, Y = y)}{P(Y = y)}$$

$$\stackrel{?}{=} \frac{0}{0}$$

设 $\Delta y > 0$

$$P(X \le x \mid y - \Delta y < Y \le y)$$

$$= \frac{P(X \le x, y - \Delta y < Y \le y)}{P(y - \Delta y < Y \le y)}$$

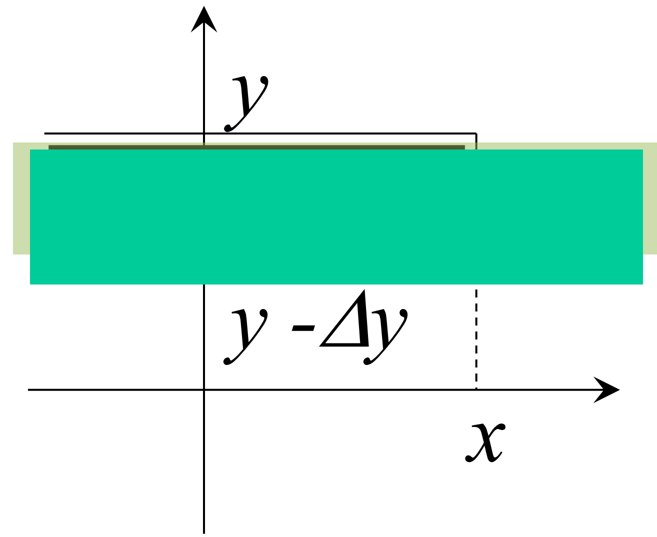


$$= \frac{F(x, y) - F(x, y - \Delta y)}{F_Y(y) - F_Y(y - \Delta y)}$$

$$= \frac{\left[F(x, y) - F(x, y - \Delta y)\right] / \Delta y}{\left[F_Y(y) - F_Y(y - \Delta y)\right] / \Delta y}$$

$$\lim_{\Delta y \to 0+} \frac{\left[F(x,y)-F(x,y-\Delta y)\right]/\Delta y}{\left[F_Y(y)-F_Y(y-\Delta y)\right]/\Delta y}$$

$$= \frac{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{\dfrac{dF_Y(y)}{dy}} = \frac{\int_{-\infty}^{x} f(u,y)\,du}{f_Y(y)}$$



$f(x,y)$连续

$f_Y(y) \neq 0$, 连续

$$\overset{\text{def.}}{=} P(X \le x \mid Y = y)$$

定义 若$f(x,y)$在点(x,y)连续，$f_Y(y)$在点y处连续且$f_Y(y)>0$, 则称

$$\frac{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{\dfrac{dF_Y(y)}{dy}}=\frac{\int_{-\infty}^{x}f(u,y)du}{f_Y(y)}$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}du$$

为$Y=y$的条件下X的条件分布函数，记作

$F_{X|Y}(x|y)$,称 $\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 为$Y=y$的条件下X的

条件概率密度函数，记作$f_{X|Y}(x|y)$

类似地，若$f(x,y)$在点(x,y)连续，$f_X(x)$在点x处连续且$f_X(x)>0$，则称

$$\frac{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}}{\dfrac{dF_X(x)}{dx}} = \frac{\int_{-\infty}^{y} f(x,v)dv}{f_X(x)}$$

$$= \int_{-\infty}^{y} \frac{f(x,v)}{f_X(x)} dv$$

为$X=x$的条件下Y的条件分布函数，记作

$F_{Y|X}(y|x)$,称 $\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$ 为$X=x$的条件下Y的

条件概率密度函数，记作 $f_{Y|X}(y|x)$

注意：

- $F_{X|Y}(x|y), f_{X|Y}(x|y)$ 是 x 的函数, y 是常数, 对于每一 $f_Y(y) > 0$ 的 y 处，只要符合定义的条件，都能定义相应的函数.

  $F_{Y|X}(y|x), f_{Y|X}(y|x)$ 是 y 的函数, x 是常数, 对于每一 $f_X(x) > 0$ 的 x 处，只要符合定义的条件，都能定义相应的函数.

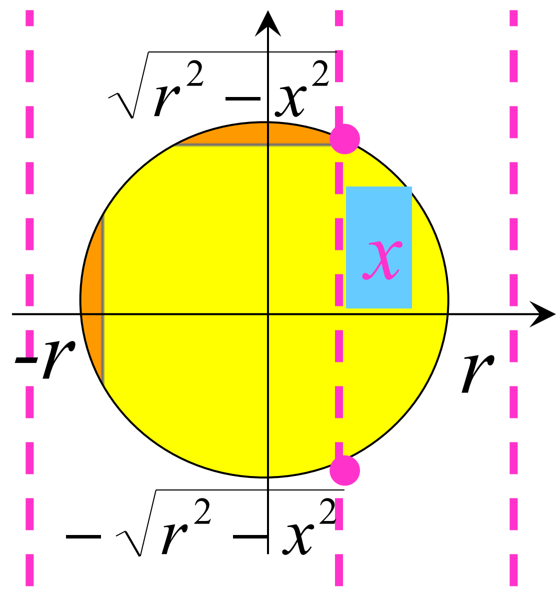
- 另外，由 $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$ 可知：

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x) \qquad f_X(x)>0$$

$$=f_Y(y)f_{X|Y}(x|y) \qquad f_Y(y)>0$$

类似于乘法公式：

例3 已知(X,Y)服从圆域 $x^2+y^2\le r^2$ 上的均匀分布，求$f_{X|Y}(x|y), f_{Y|X}(y|x)$.



解

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi r^2}, & x^2+y^2<r^2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}}\frac{1}{\pi r^2}dy, & -r<x<r\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}, & -r<x<r\\ 0, & 其他\end{cases}$$

同理，

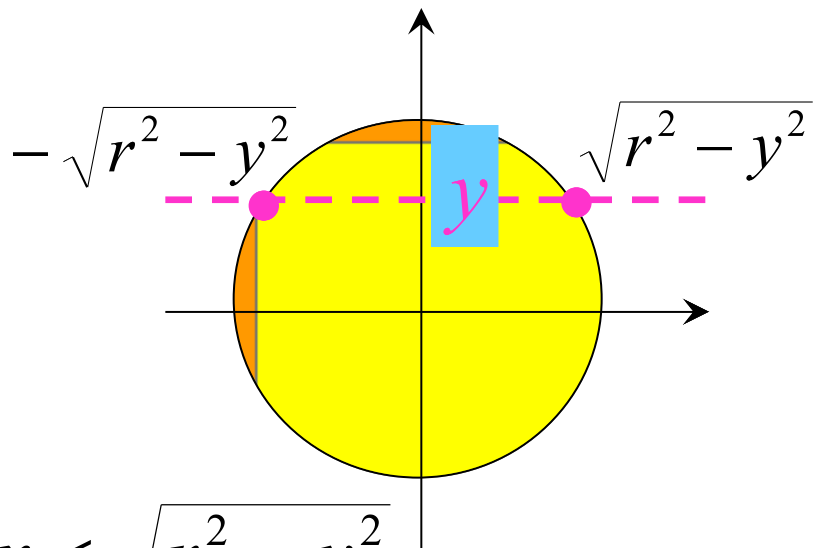
$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases} \dfrac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2}, & -r<y<r \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

边缘分布不是均匀分布！

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi r^2}, & x^2+y^2<r^2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2}, & -r<y<r\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

当 $-r<y<r$ 时，



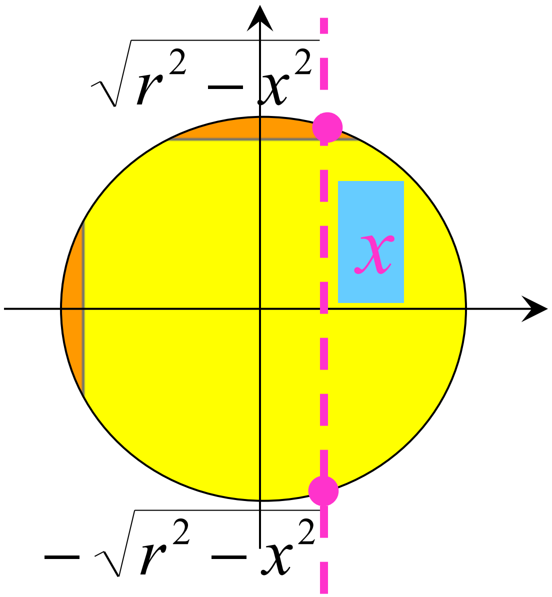
$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{r^2-y^2}}, & -\sqrt{r^2-y^2}<x<\sqrt{r^2-y^2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

—— 这里 y 是常数，当 $Y=y$ 时，

$$X\sim U\left(-\sqrt{r^2-y^2},\sqrt{r^2-y^2}\right)$$

当 $-r < x < r$ 时，



$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{r^2 - x^2}}, & -\sqrt{r^2 - x^2} < y < \sqrt{r^2 - x^2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

—— 这里 x 是常数，当 $X = x$ 时，

$$Y \sim U\left(-\sqrt{r^2 - x^2}, \sqrt{r^2 - x^2}\right)$$