§3.3 随机变量的独立性

——将事件的独立性推广到随机变量

两个随机变量的相互独立性

若(X,Y)为二维随机变量，则对某一对实数 x, y

$(X\le x)$, $(Y\le y)$, 其交事件为：$(X\le x,\ Y\le y)$,

$$P(X\le x,\ Y\le y)= P(X\le x)\ P(Y\le y)$$

如果对于任何实数 x, y，上述关系都成立，则称随机变量X,Y独立

定义 设(X,Y)为二维随机变量，若对于任何实数x, y都有

$$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y)$$

则称随机变量X和Y相互独立

由定义可知

二维随机变量(X, Y)相互独立

$$\Longleftrightarrow \quad F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$$

$\Leftrightarrow \quad \forall a < b, c < d$

$$P(a < X \le b, c < Y \le d)$$

$$= P(a < X \le b) P(c < Y \le d)$$

$\Rightarrow \quad F(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$

$$P(a < X \le b, \mathrm{c} < Y \le d)$$

$$= F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)$$

$$= F_X(b) F_Y(d) - F_X(a) F_Y(d) - F_X(b) F_Y(c) + F_X$$
$$(a) {}_Y F(c)$$

$$= [F_X(b) - F_X(a)][F_Y(d) - F_Y(c)]$$

$$= P(a < X \le b) P(\mathrm{c} < Y \le d)$$

$$\Leftarrow \quad \forall a < b, c < d$$

$$P(a < X \le b, c < Y \le d)$$

$$= P(a < X \le b)P(c < Y \le d)$$

令$a \to -\infty, c \to -\infty$， $b = x, c = y$，则

$$P(-\infty < X \le x, -\infty < Y \le y)$$

$$= P(-\infty < X \le x)\, P(-\infty < Y \le y)$$

即$F(x, y) = F_X(x)\, F_Y(y)$

$$\Leftrightarrow \quad \forall a, c \in R$$

$$P(X > a, Y > c) = P(X > a)P(Y > c)$$

二维离散型随机变量(X, Y)相互独立

$\Longleftrightarrow$ $P(X=x_i, Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$

即 $p_{ij}=p_{i\bullet}p_{\bullet j}$

$\Longrightarrow$ $\forall a<b, c<d$

$$P(a<X\le b, c<Y\le d)$$

$$=P(a<X\le b)P(c<Y\le d)$$

取$a=x_{i-1}, c=y_{i-1}$， $b=x_i, d=y_i$，

得$P(x_{i-1}<X\le x_i, y_{i-1}<Y\le y_i)$

$=P(x_{i-1}<X\le x_i)\,P(y_{i-1}<Y\le y_i)$

即$P(X=x_i, Y=y_i)=P(X=x_i)\,P(Y=y_i)$

$$P(X = x_i, Y = y_i) = P(X = x_i)\,P(Y = y_i)$$

则 $P(X \le x_i, Y \le y_j)$

$$= \sum_{\substack{x \le x_i \\ y \le y_j}} P(X = x, Y = y)$$

$$= \sum_{\substack{x \le x_i \\ y \le y_j}} P(X = x)P(Y = y)$$

$$= \sum_{x \le x_i} P(X = x) \cdot \sum_{y \le y_j} P(Y = y)$$

$$= P(X \le x_i)P(Y \le y_j)$$

例：已知(X, Y)的联合分布律如下：

$Y \backslash X$ (p_{ij})	1	2	$p_{\bullet j}$
-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$p_{i\bullet}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	

(1)试判断X 与 Y的独立性

(2)求P(Y=1|X=2)

X / p_{ij} / Y	1	2	$p_{\bullet j}$
-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	
$p_{i\bullet}$			

二维连续型随机变量 (X, Y) 相互独立

$$\Longleftrightarrow \quad f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \quad (a.e.)$$

二维随机变量 (X, Y) 相互独立,
则边缘分布完全确定联合分布

又 $f(x,y) = f_X(x) f_{Y|X}(y|x)$

二维连续型随机变量 (X, Y) 相互独立

$$\Longrightarrow \quad f_X(x) = f_{X|Y}(x|y) \quad (f_Y(y) > 0)$$

$$f_Y(y) = f_{Y|X}(y|x) \quad (f_X(x) > 0)$$

命题 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$ 相互独立

$\Longleftrightarrow$ $\rho=0$

证 $\longrightarrow$ 对任何 x,y 有

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

取 $x=\mu_1,y=\mu_2$

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}$$

故 $\rho = 0$

将 $\rho = 0$ 代入 $f(x, y)$ 即得

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

例1 已知(X, Y)的联合概率密度为

(1) $$f_1(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0<x<1, 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(2) $$f_2(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0<x<y, 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

讨论X, Y是否独立？

解

$$(1)\quad f_1(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0<x<1,0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

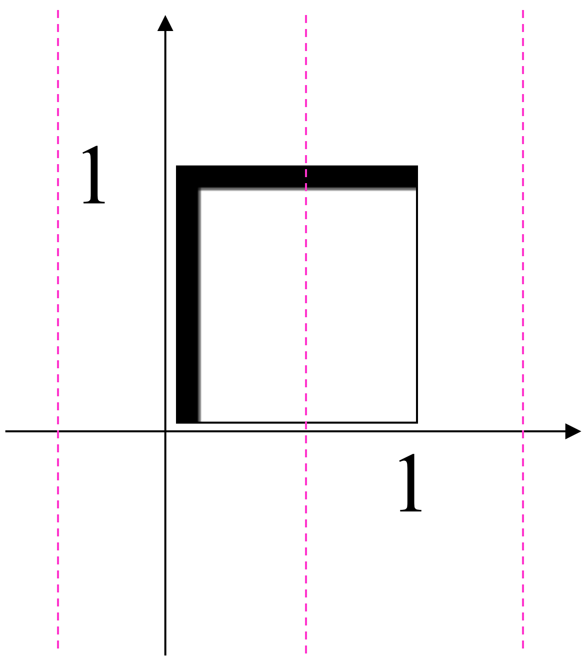
由图可知边缘密度函数为

当0<x<1时

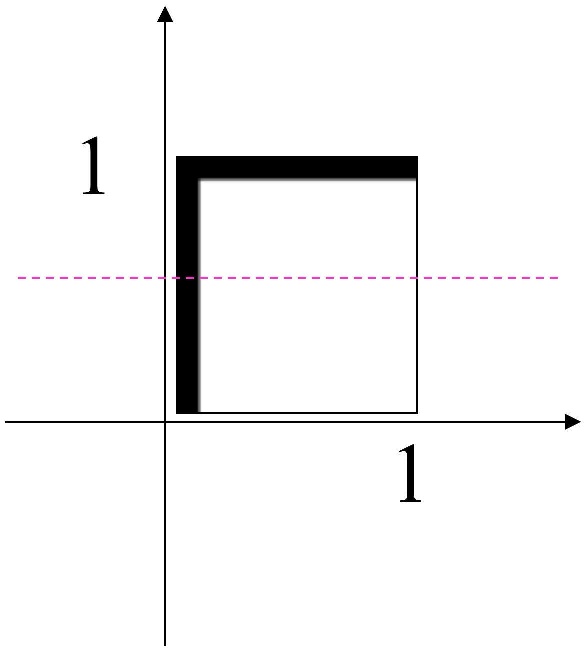
$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

$$=\int_0^1 4xydy$$

$$=2x$$



$$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$



同样地，

$$f_Y(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

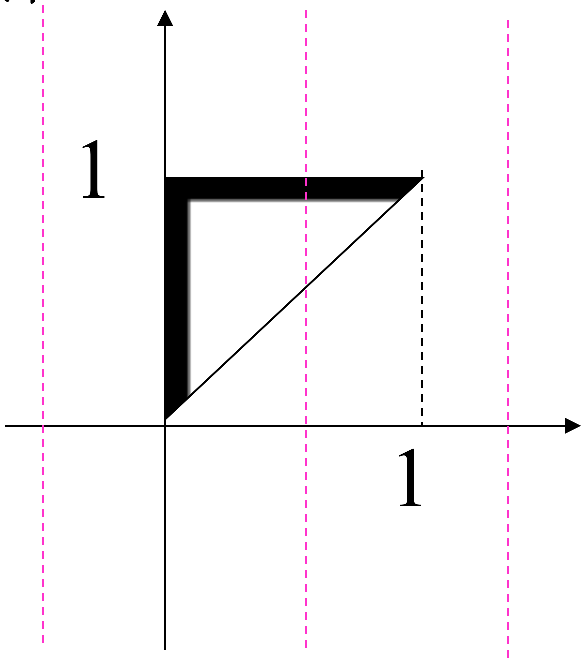
显然，

$$f_1(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

故X,Y相互独立

$$f_1(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0<x<1, 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(2) $$f_2(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0<x<y, 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$



由图可知边缘密度函数为

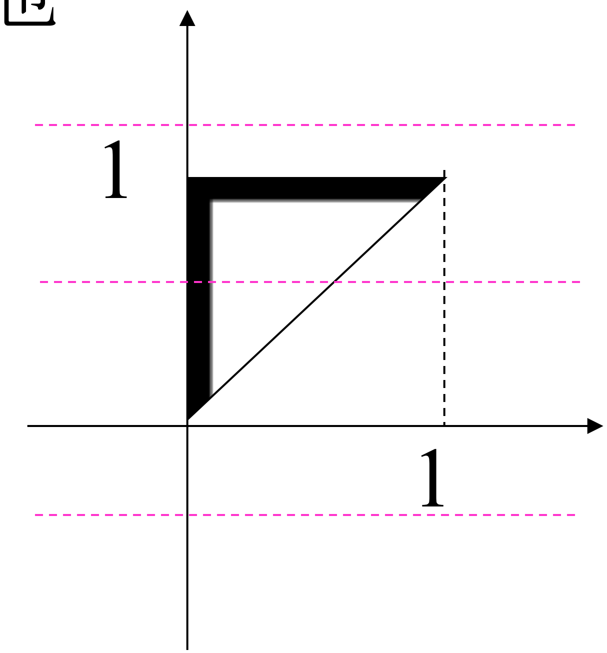
当0<x<1时

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

$$=\int_x^1 8xydy$$

$$=4x(1-x^2)$$

$$f_X(x)=\begin{cases}4x(1-x^2), & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$



同样地，

$$f_Y(y)=\begin{cases}4y^3, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

显然， $f_2(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$

故X,Y不独立

$$f_2(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0<x<y,0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

判断连续型二维随机变量相互独立的两个结论

- 设$f(x,y)$是连续型二维随机变量(X,Y)的联合密度函数，$r(x)$, $g(y)$为非负可积函数，且

$$f(x,y)=r(x)g(y) \qquad (a.e.)$$

则(X,Y)相互独立

且

$$f_X(x)=\frac{r(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty}r(x)dx} \qquad (a.e.)$$

$$f_Y(y)=\frac{g(y)}{\int_{-\infty}^{+\infty}g(y)dy} \qquad (a.e.)$$

证明：若 $f(x,y)=r(x)g(y)$

则 $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)g(y)dy$$

$$=r(x)\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)dy$$

同样地

$$f_Y(y)=g(y)\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)dx$$

$$f_X(x)\cdot f_Y(y)=r(x)\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)dy\cdot g(y)\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)dx$$

$$=r(x)g(y)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)g(y)dydx$$

$$=r(x)g(y)\quad =f(x,y)$$

利用此结果，不需计算即可得出例1(1)中的随机变量X与Y是相互独立的.

例1(1)中，$f_1(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0<x<1,0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$$=r(x)g(y)$$

其中 $r(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$$g(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

再如，服从矩形域$\{(x,y)|\ a < x < b,\ c < y < d\}$上的均匀分布的二维随机变量$(X,Y)$,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)(d-c)} & a<x<b,c<y<d\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

X,Y是相互独立的. 且其边缘分布也是均匀分布

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{d-c}, & c<y<d\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

若

$$f(x,y)=\begin{cases}6e^{-2x-3y} & x>0, y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

则 X, Y 是相互独立的. 且其边缘分布为

$$f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}3e^{-3y}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

若

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-3y} & -1<x<2, y>0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

则 X, Y 是相互独立的. 且其边缘分布为

$$f_X(x)=\begin{cases} \frac{1}{3}, & -1<x<2 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} 3e^{-3y}, & y>0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

对于分布函数也有类似的结果

设$F(x,y)$是连续型二维随机变量(X,Y)的联合分布函数，则(X,Y)相互独立的充要条件为

$$F(x,y)=R(x)G(y)$$

且

$$F_X(x)=\frac{R(x)}{R(+\infty)}$$

$$F_Y(y)=\frac{G(y)}{G(+\infty)}$$

- 设 X, Y 为相互独立的随机变量，$u(x), v(y)$为连续函数, 则$U = u(X), V = v(Y)$也相互独立.

事实上，设X与Y的概率密度函数分别为$f_X(x)$, $f_Y(y)$, 则

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

因此，$F_{UV}(u, v) = P(U \le u, V \le v)$

$$= P(u(X) \le u, v(Y) \le v) = \iint\limits_{\substack{u(x)\le u \\ v(y)\le v}} f_X(x) f_Y(y) dxdy$$

$$= \int\limits_{u(x)\le u} f_X(x) dx \int\limits_{v(y)\le v} f_Y(y) dy$$

$$= P(u(X) \le u) P(v(Y) \le v) = F_U(u) F_V(v)$$

例如，若 X, Y 为相互独立的随机变量

则 $aX+b,\ cY+d$ 也相互独立；

$X^2,\ Y^2$ 也相互独立；

随机变量相互独立的概念可以推广到 n 维随机变量

若 $P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n)$

$$= P(X_1 \le x_1)P(X_2 \le x_2)\cdots P(X_n \le x_n)$$

则称随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立

注意 若两个随机变量相互独立，且又有相同的分布，不能说这两个随机变量相等. 如

X	-1	1
P	0.5	0.5

Y	-1	1
P	0.5	0.5

X, Y 相互独立，则

Y \ X (p_{ij})	-1	1
-1	0.25	0.25
1	0.25	0.25

$P(X = Y) = 0.5$, 故不能说 $X = Y$.

例3 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2xy, 0\le x\le 1, 0\le y\le 2x\\ 0, \text{其它}\end{cases}$$

(1)求关于X和Y的边沿概率密度;

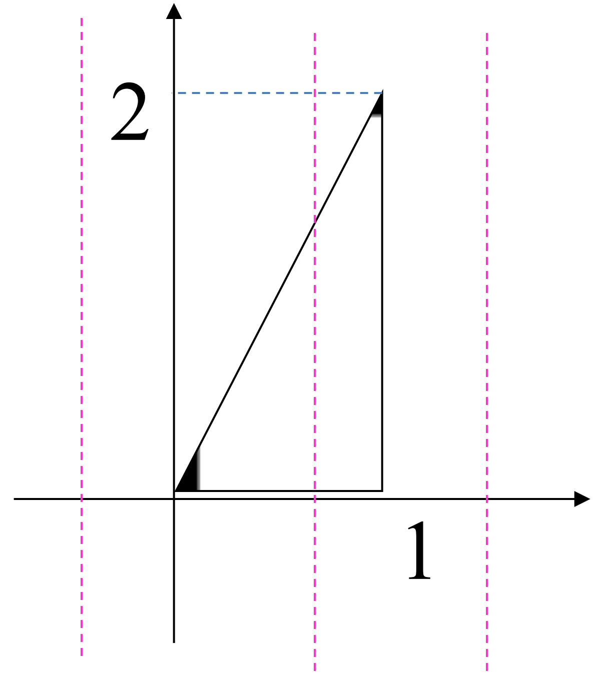
(2)求条件概率密度$f_{Y|X}(y|x)$, $f_{X|Y}(x|y)$

(3)求$P(X\ge 0.75|Y=1)$, $P(Y\le 0.5|X=0.5)$,

(4)求$P(X\ge 0.75|Y\ge 1)$

解(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$

当$0< x< 1$时，

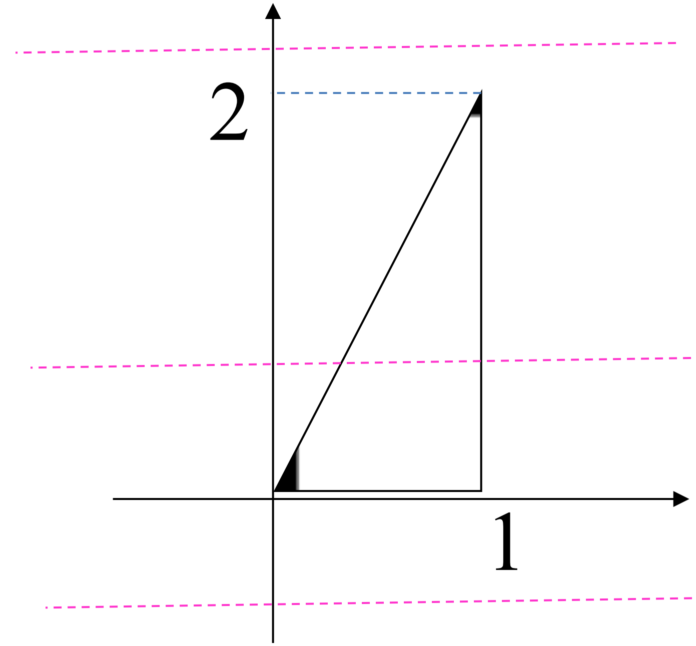


$$f_X(x)=\int_0^{2x} 2xydy$$

$$=4x^3$$

$$f_X(x)=\begin{cases}4x^3, 0\le x\le 1\\ 0, \text{其它}\end{cases}$$

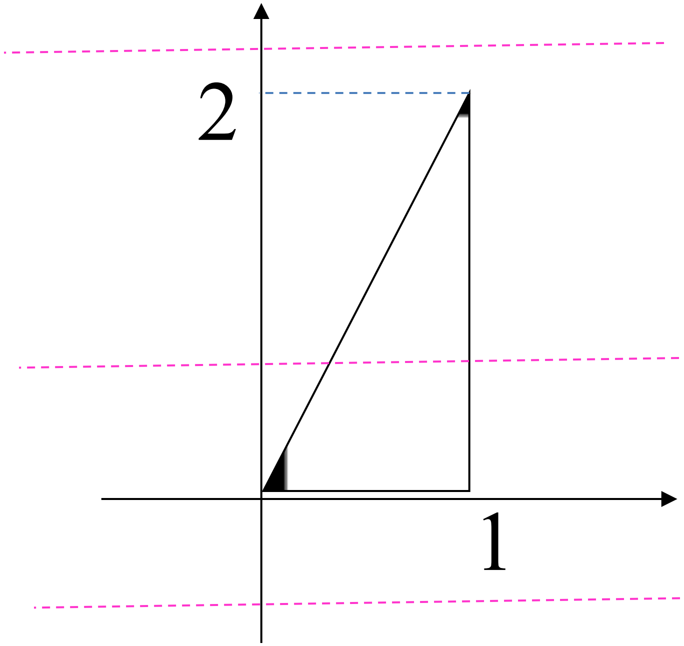
同样地，



$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases}\int_{\frac{y}{2}}^{1} 2xydx=y(1-\frac{1}{4}y^2), & 0\le y\le 2\\ 0, 其它 & \end{cases}$$

(2)当$0< y< 2$时，$f_Y(y)\neq 0$



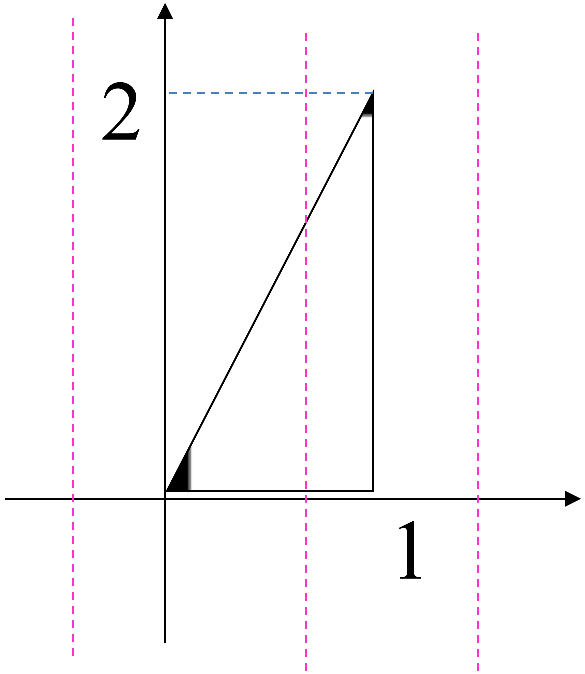
$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{8x}{4-y^2}, & \dfrac{y}{2}\le x\le 1\\ 0, & 其它x\end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}2xy, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 2x\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}y(1-\frac{1}{4}y^2), & 0\le y\le 2\\ 0, & 其它\end{cases}$$

当$0<x<1$时，$f_X(x)\neq 0$

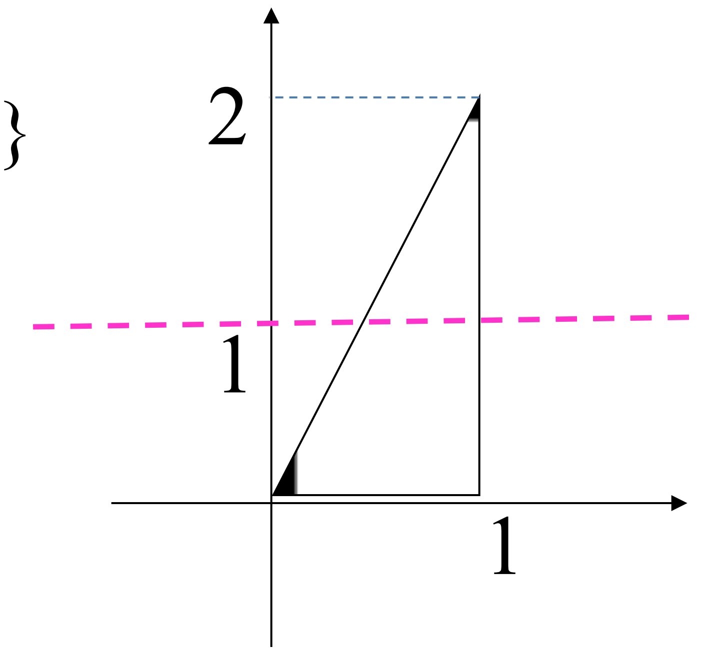


$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{y}{2x^2}, 0\le y\le 2x\\ 0, \text{其它}y\end{cases}$$

(3)当y=1时，求 $P\{X \geq \frac{3}{4} \mid Y=1\}$

$$f_{X|Y}(x \mid y)=\begin{cases}\frac{8x}{4-y^2}, \frac{y}{2} \leq x \leq 1 \\ 0, \text{其它} x\end{cases}$$



$$f_{X|Y}(x \mid 1)=\begin{cases}\frac{8x}{3}, \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0, \text{其它} x\end{cases}$$

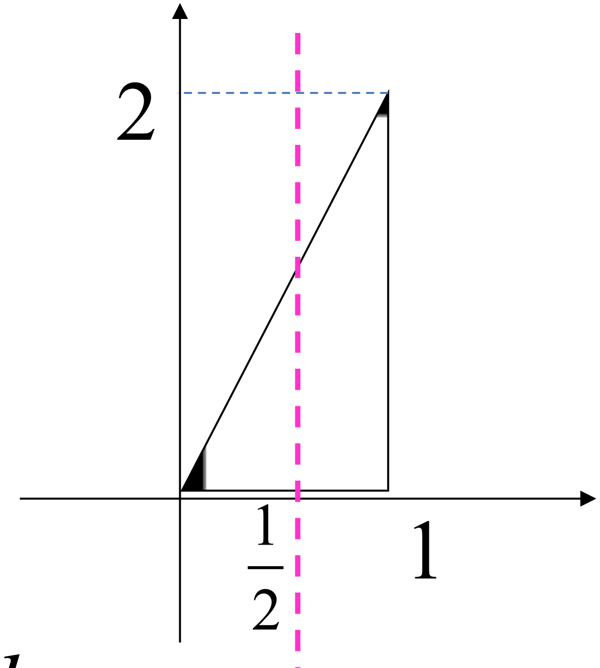
$$P\{X \geq \frac{3}{4} \mid Y = 1\} = \int_{\frac{3}{4}}^{+\infty} f_{X|Y}(x \mid 1)dx$$

$$= \int_{\frac{3}{4}}^{1} \frac{8}{3} x dx$$

$$= \frac{4}{3} x^2 \Big|_{\frac{3}{4}}^{1} = \frac{7}{12}$$

当x=1/2时，

$$f_{Y|X}(y|\frac{1}{2})=\begin{cases}2y, 0\le y\le 1\\ 0, 其它y\end{cases}$$



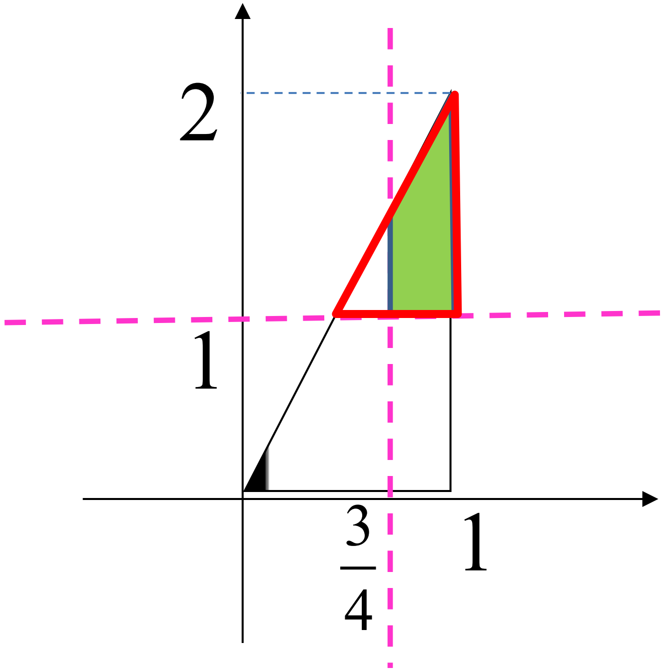
$$P\{Y\le\frac{1}{2}|X=\frac{1}{2}\}=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}f_{Y|X}(y|\frac{1}{2})dy$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}2ydy$$

$$=y^2\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$$

$$f_{Y|X}(y|x)==\begin{cases}\frac{y}{2x^2}, 0\le y\le 2x\\ 0, 其它y\end{cases}$$

(4) 求$P(X\geq 0.75|Y\geq 1)$



$$P\{X\geq\frac{3}{4}\,|\,Y\geq 1\}$$

$$=\frac{P(X\geq\frac{3}{4},Y\geq 1)}{P(Y\geq 1)}$$

$$=\frac{\int_{\frac{3}{4}}^{1}dx\int_{1}^{2x}2xydy}{\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{1}^{2x}2xydy}=\frac{119}{144}$$

$$\int_{1}^{2}y(1-\frac{1}{4}y^{2})dy$$