§4.1 随机变量函数的分布

问题：已知随机变量 X 的概率特性 —— 分布函数 或密度函数（分布律）

及 $Y = g(X)$

求 随机因变量 Y 的概率特性

方法：将与 Y 有关的事件转化成 X 的事件

离散型随机变量函数的分布

设随机变量 X 的分布律为

$$P(X = x_k) = p_k, \qquad k = 1, 2, \cdots$$

$$y=g(x) \quad \text{即} \, Y=g(X)$$

由已知函数 $g(x)$ 可求出随机变量 Y 的所有可能取值，则 Y 的概率分布为

$$P(Y = y_i) = \sum_{k:g(x_k)=y_i} p_k, \qquad i = 1, 2, \cdots$$

例1 已知 X 的概率分布为

X	-1	0	1	2
p_k	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

求 $Y_1 = 2X - 1$ 与 $Y_2 = X^2$ 的分布律

解

X	-1	0	1	2
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$Y_1 = 2X - 1$	-3	-1	1	3

X	-1	0	1	2
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$Y_2 = X^2$	1	0	1	4

Y_2	0	1	4
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$

例2 已知 X 的概率分布为

$$P(X = k\frac{\pi}{2}) = pq^k, \qquad k = 0,1,2,\cdots$$

其中 $p + q = 1,\ 0 < p < 1,$

求 $Y = \mathrm{Sin}\, X$ 的概率分布

解 $P(Y=0)$ $= P\left(\bigcup_{m=0}^{\infty}(X = m\pi)\right)$

$$= P\left(\bigcup_{m=0}^{\infty}(X = 2m\cdot\frac{\pi}{2})\right)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} pq^{2m} = \frac{p}{1-q^2}$$

$$P(Y=1) = P\left(\bigcup_{m=0}^{\infty}(X = 2m\cdot\pi + \frac{\pi}{2})\right)$$

$$= P\left(\bigcup_{m=0}^{\infty}(X = (4m+1)\frac{\pi}{2})\right)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} pq^{4m+1} = \frac{pq}{1-q^4}$$

$$P(Y=-1) = P\left(\bigcup_{m=0}^{\infty}(X = 2m\pi + \frac{3\pi}{2})\right)$$

$$= P\left(\bigcup_{m=0}^{\infty}(X = (4m+3)\frac{\pi}{2})\right)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} pq^{4m+3} = \frac{pq^3}{1-q^4}$$

故 Y 的概率分布为

Y	-1	0	1
p_i	$\dfrac{pq^3}{1-q^4}$	$\dfrac{p}{1-q^2}$	$\dfrac{pq}{1-q^4}$

连续性随机变量函数的分布

已知随机变量 X 的密度函数 $f(x)$ (或分布函数)
求 $Y = g(X)$ 的密度函数或分布函数

方法：

例3 已知 X 密度函数为$f_X(x)$, $Y=aX+b$, a , b为常数，且 $a\neq 0$, 求$f_Y(y)$

解
$$F_Y(y)=P(Y\le y)$$
$$=P(aX+b\le y)$$

当$a>0$时，

$$F_Y(y)=P\left(X\le \frac{1}{a}(y-b)\right)$$
$$=F_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right)$$

$$\Longrightarrow\quad f_Y(y)=\frac{1}{a}f_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right)$$

当$a<0$时，

$$F_Y(y)=P(aX+b\le y)$$

$$=P\left(X\ge\frac{1}{a}(y-b)\right)$$

$$=1-F_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right)$$

$$\Longrightarrow\quad f_Y(y)=-\frac{1}{a}f_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right)$$

故

$$\boxed{f_Y(y)=\frac{1}{|a|}f_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right)}$$

例如，设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y=aX+b$，则

$$f_Y(y)=\frac{1}{|a|}f_X\left(\frac{1}{a}(y-b)\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma|a|}e^{-\frac{(\frac{1}{a}(y-b)-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma|a|}e^{-\frac{(y-b-a\mu)^2}{2a^2\sigma^2}}\qquad -\infty<y<\infty$$

$$Y\sim N(a\mu+b,\ a^2\sigma^2)$$

特别地，若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$， $a=\frac{1}{\sigma},\ b=-\frac{\mu}{\sigma}$

则 $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

例4 $X \sim E(2)$, $Y=-3X+2$, 求$f_Y(y)$

解

$$f_Y(y)=\frac{1}{|-3|}f_X\left(\frac{1}{-3}(y-2)\right)$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{3}\cdot 2e^{-2\cdot\left(-\frac{y-2}{3}\right)}, & -\frac{y-2}{3}>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{2}{3}e^{-\frac{2(2-y)}{3}}, & y<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

例5 已知 $X \sim N(0,1)$，$Y = X^2$，求 $f_Y(y)$

解

$$F_Y(y) = P(Y \le y)$$

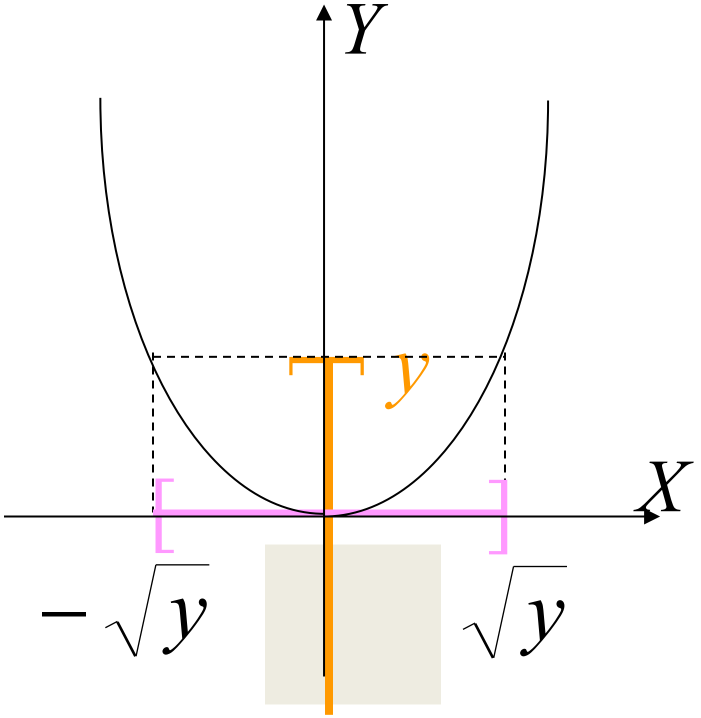
当 $y < 0$ 时，$F_Y(y) = 0$

当 $y > 0$ 时，

$$F_Y(y) = P(X^2 \le y)$$

$$= P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y})$$

$$= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$



$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y}), & y>0\end{cases}$$

故 $$f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\Big(f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})\Big), & y>0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,y^{1/2}}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0\end{cases}$$

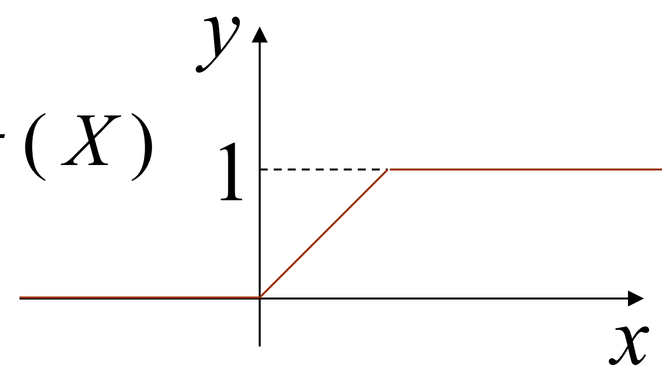
$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

注意：连续型随机变量的函数的分布函数不一定是连续函数

例如：$X \sim U(0,2)$ $\quad f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$$g(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x, & 0<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

令 $Y=g(X)$



则：$Y=g(X)$的取值范围为$[0,1]$

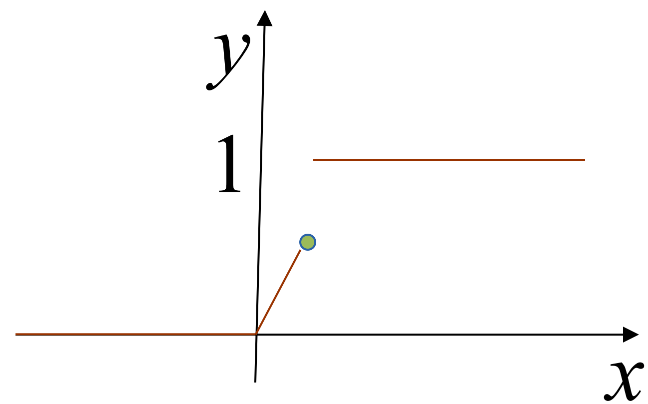
故 $y<0$时， $F_Y(y)=0$

$0 \le y < 1$ 时，

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(X < y) = \int_0^y \frac{1}{2} dx = \frac{y}{2}$$

$y \ge 1$ 时，　　$F_Y(y) = 1$

故 $$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \dfrac{y}{2}, & 0 \le y < 1 \\ 1, & y \ge 1 \end{cases}$$



$F_Y(y)$不是连续函数