§4.3 二维随机变量函数的分布

问题：已知二维随机变量(X,Y)的概率特性

$g(x,y)$为已知的二元函数，$Z=g(X,Y)$

求：Z的概率特性

方法：转化为(X,Y)的事件

当(X,Y)为离散型随机变量时，Z也为离散型，

$$Z = z_k = g(x_{i_k}, y_{j_k})$$

$$P(Z = z_k) = \sum_{g(x_{i_k}, y_{j_k}) = z_k} P(X = x_{i_k}, Y = y_{j_k})$$

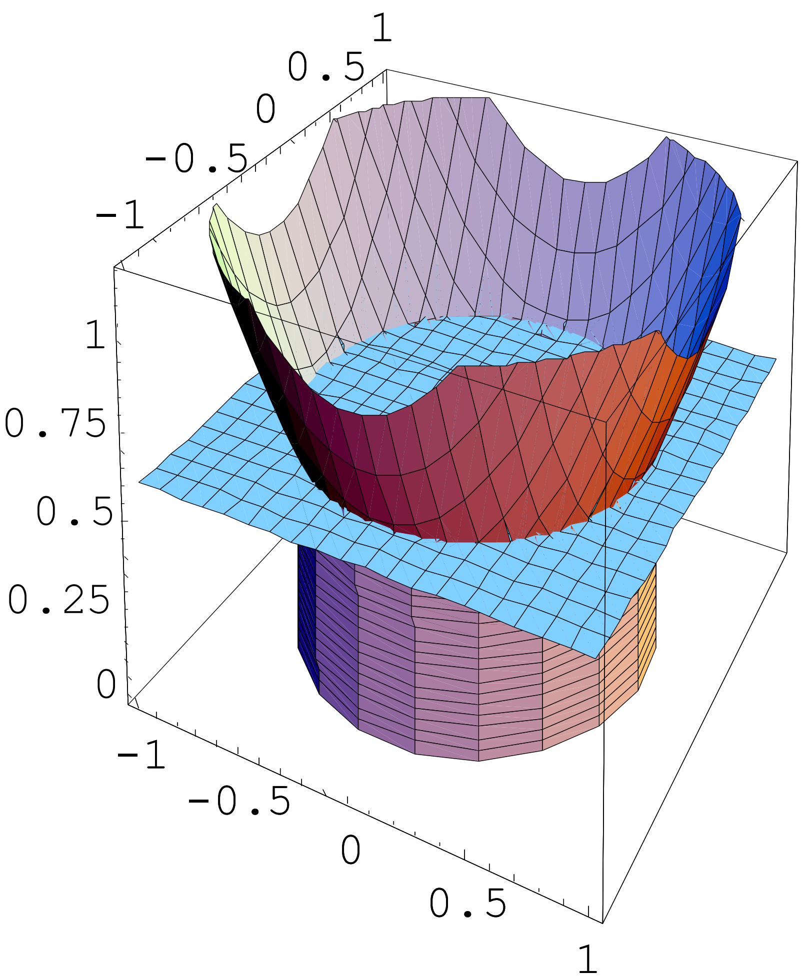
$$k = 1, 2, \cdots$$

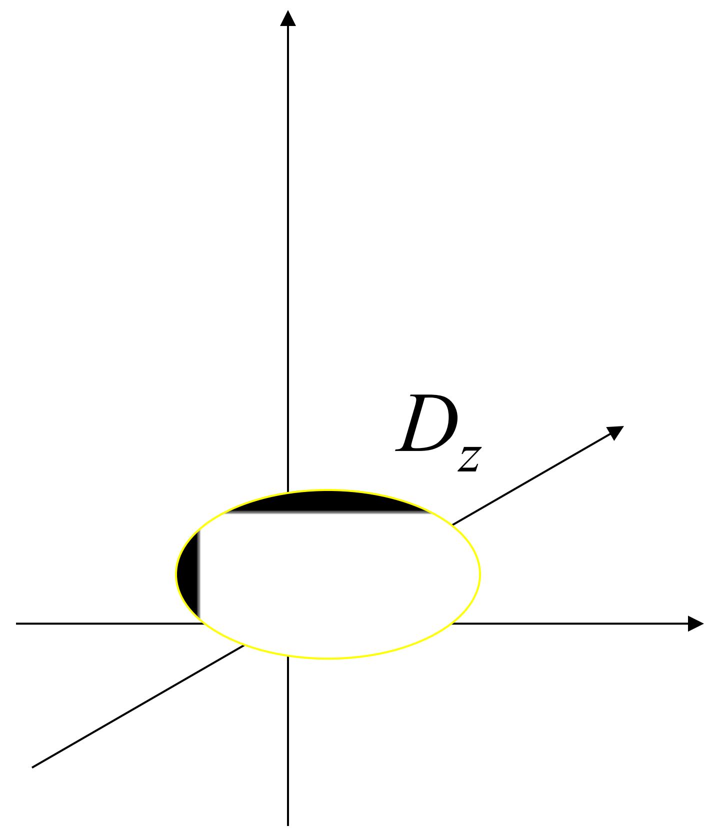
当(X,Y)为连续型随机变量时，

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(g(X,Y) \le z) = \iint_{D_z} f(x,y)\,dxdy$$

其中 $D_z : \{(x, y) \mid g(x, y) \le z\}$

$D_z: \{(x, y) \mid g(x, y) \le z\}$ 的几何意义：





离散型二维随机变量的函数

例1 设二维离散型随机变量(X,Y)的概率分布为

$Y \backslash X$ (p_{ij})	-1	1	2
-1	$1/4$	$1/6$	$1/8$
0	$1/4$	$1/8$	$1/12$

求$X+Y, X-Y, XY, Y/X, \max(X,Y)$的概率分布

解 根据(X,Y)的联合概率分布可得如下表格：

P	$1/4$	$1/4$	$1/6$	$1/8$	$1/8$	$1/12$
(X,Y)	$(-1,-1)$	$(-1,0)$	$(1,-1)$	$(1,0)$	$(2,-1)$	$(2,0)$
$X+Y$	-2	-1	0	1	1	2
$X-Y$	0	-1	2	1	3	2
XY	1	0	-1	0	-2	0
Y/X	1	0	-1	0	-1/2	0
Max(X,Y)	-1	0	1	1	2	2

故得

$X+Y$	-2	-1	0	1	2
P	1/4	1/4	1/6	1/4	1/12

$X-Y$	-1	0	1	2	3
P	1/4	1/4	1/8	1/4	1/8

XY	-2	-1	0	1
P	$1/8$	$1/6$	$11/24$	$1/4$

Y/X	-1	-1/2	0	1
P	$1/6$	$1/8$	$11/24$	$1/4$

Max(X,Y)	-1	0	1	2
P	$1/6$	$1/8$	$7/24$	$5/24$

关于离散型随机变量的两个结论：

- 设 $X \sim B(n_1,p)$, $Y \sim B(n_2,p)$, 且 X,Y 相互独立，
  则 $X+Y \sim B(n_1+n_2,\, p)$

- 设 $X \sim P(\lambda_1)$, $Y \sim P(\lambda_2)$, 且 X,Y 相互独立，
  则 $X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

关于二项分布的和的分布的说明：

$X \sim B(n_1, p)$, $Y \sim B(n_2, p)$, 则

$Z = X + Y$ 的可能取值为 $0,1,2,\cdots, n_1 + n_2$

设$n_1 \le n_2$, 当$k \le n_1$时，

$$
\begin{aligned}
P(Z = k) &= \sum_{i=0}^{k} P(X = i, Y = k - i), \\
&= \sum_{i=0}^{k} P(X = i) P(Y = k - i), \\
&= \sum_{i=0}^{k} C_{n_1}^{i} p^{i} (1 - p)^{n_1 - i} C_{n_2}^{k-i} p^{k-i} (1 - p)^{n_2 - k + i} \\
&= C_{n_1 + n_2}^{k} p^{k} (1 - p)^{n_1 + n_2 - k}
\end{aligned}
$$

其中 $\sum_{i=0}^{k} C_{n_1}^{i} C_{n_2}^{k-i} = C_{n_1+n_2}^{k}$

当 $n_1 < k \leq n_2$ 时

$$P(Z = k) = \sum_{i=0}^{n_1} P(X = i, Y = k - i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n_1} C_{n_1}^{i} p^{i} (1 - p)^{n_1 - i} C_{n_2}^{k-i} p^{k-i} (1 - p)^{n_2 - k + i}$$

$$= C_{n_1+n_2}^{k} p^{k} (1 - p)^{n_1 + n_2 - k}$$

当 $n_2 < k \leq n_1 + n_2$ 时

$$P(Z = k) = \sum_{i=k-n_2}^{n_1} P(X = i, Y = k - i)$$

$$= \sum_{i=k-n_2}^{n_1} C_{n_1}^{i} p^{i} (1-p)^{n_1-i} C_{n_2}^{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n_2-k+i}$$

$$= C_{n_1+n_2}^{k} p^{k} (1-p)^{n_1+n_2-k}$$

故 $X + Y \sim B(\ n_1 + n_2, p)$

事实上，从二项分布的背景，若每次试验事件 A 发生的概率为 p，则 $X + Y$ 表示做了 $n_1 + n_2$ 次独立试验事件 A 发生的次数

关于Poisson 分布的和的分布的说明：

$X\sim P(\lambda_1),\ Y\sim P(\lambda_2)$, 则

$Z = X + Y$ 的可能取值为 0,1,2, ⍰,

$$P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i,Y=k-i),$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i e^{-\lambda_1}}{i!}\cdot\frac{\lambda_2^{k-i}e^{-\lambda_2}}{(k-i)!}$$

$$=\frac{e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}$$

$$=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{k!}\qquad k=0,1,2,\cdots$$