二维连续型随机变量函数的分布

问题：已知二维随机变量(X,Y)的密度函数，$g(x,y)$为已知的二元函数，$Z=g(X,Y)$

求：Z的密度函数

方法：

- 先求Z的分布函数，将Z的分布函数转化为(X,Y)的事件

(1) 和的分布：$Z = X + Y$

设(X, Y)为连续型随机变量，
联合密度函数为$f(x,y)$, 则

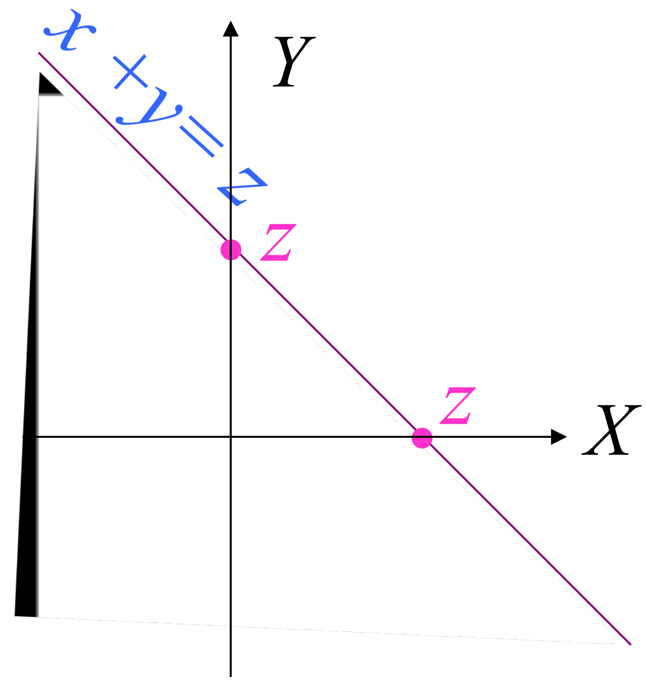
$$F_Z(z) = P(Z \le z)$$

$$= P(X + Y \le z)$$

$$= \iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\,dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)\,dy$$

或 $$= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\,dx$$



$$-\infty < z < +\infty$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx \qquad -\infty < z < +\infty \quad (1)$$

$$=\int_{\overline{AB}} f(x,y)dx \qquad \overline{AB}\text{ 为有向直线 } x+y=z$$

或 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy \qquad -\infty < z < +\infty \quad (2)$$

$$=\int_{\overline{BA}} f(x,y)dy$$

特别地，若X,Y相互独立，则

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx \overset{\text{记作}}{=} f_X(z)*f_Y(z)$$

$$-\infty < z < +\infty \quad (3)$$

或 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy \overset{\text{记作}}{=} f_X(z)*f_Y(z)$$

$$-\infty<z<+\infty \qquad (4)$$

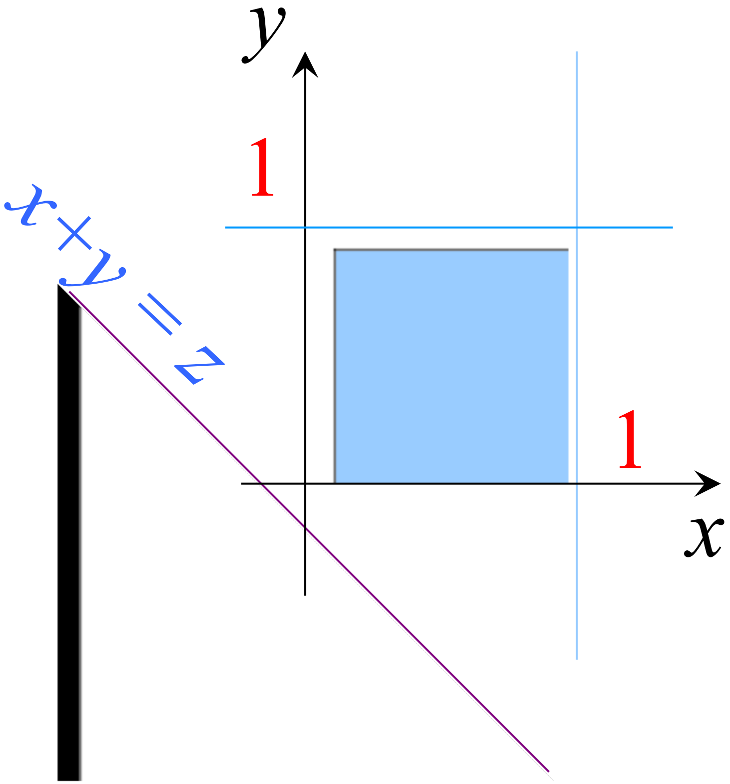
称之为函数 $f_X(z)$ 与 $f_Y(z)$ 的卷积

$$F_Z(z) = P(X+Y \le z)$$

$$= \iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$$

当$z<0$时，

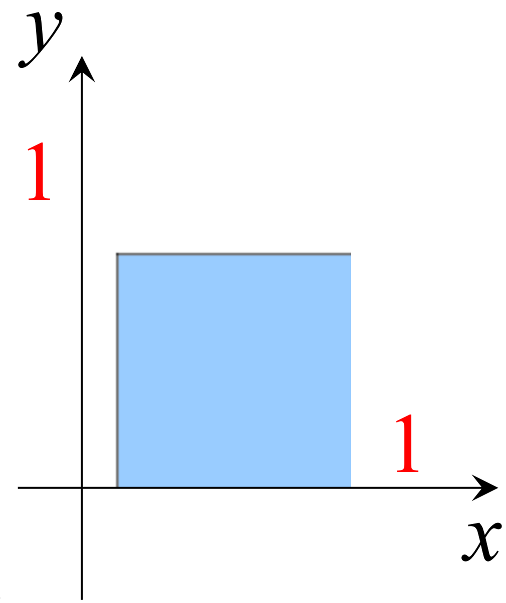
$$F_Z(z) = 0$$



例1 已知(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$Z=X+Y$,求$f_Z(z)$



解： 先求分布函数

显然X,Y相互独立,且

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

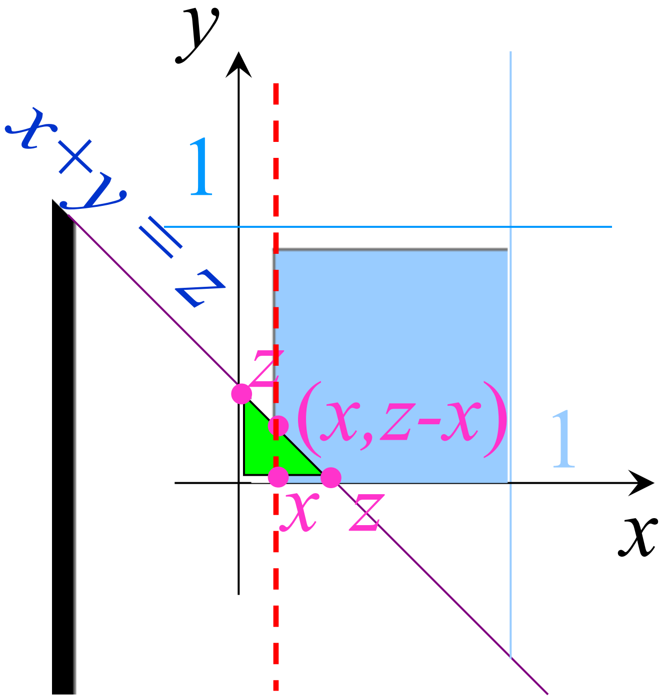
当$0 \le z < 1$时，

$$F_Z(z) = \int_0^z dx \int_0^{z-x} 1 dy$$

$$= \int_0^z (z-x) dx$$

$$= \frac{z^2}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad f_Z(z) = z$$

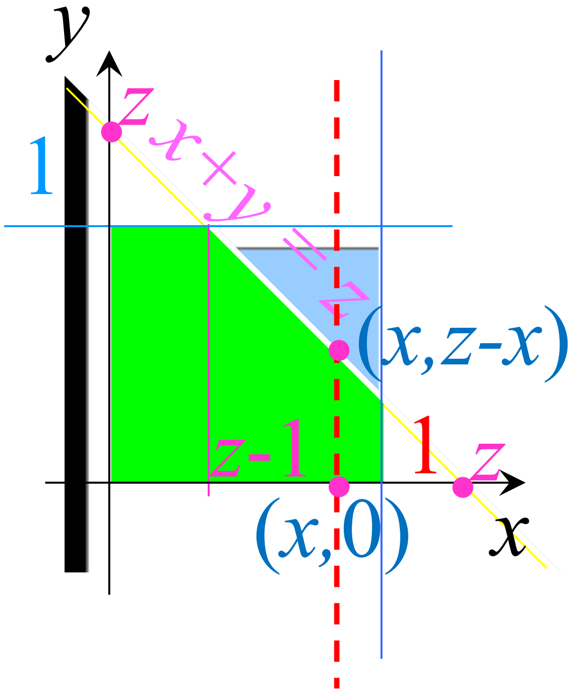


当$1 \le z < 2$时，

$$F_Z(z) = (z-1) + \int_{z-1}^{1} dx \int_0^{z-x} 1dy$$

$$= z - 1 + \int_{z-1}^{1} (z-x)dx$$

$$= 2z - \frac{z^2}{2} - 1$$

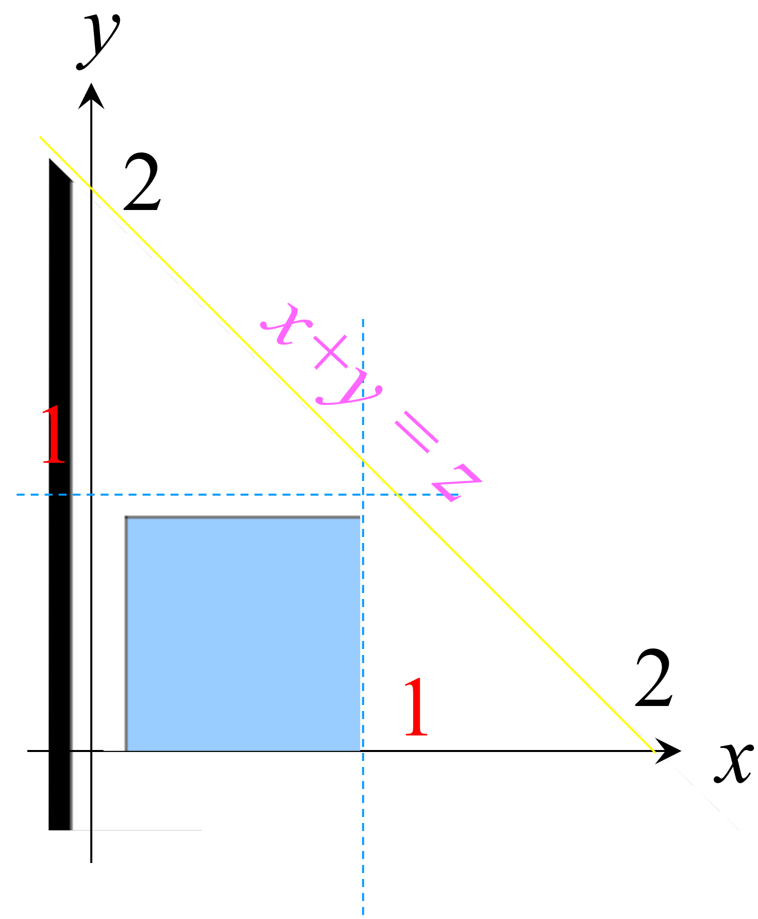


$$\Rightarrow \quad f_Z(z) = 2 - z$$

当$2 \le z$时，

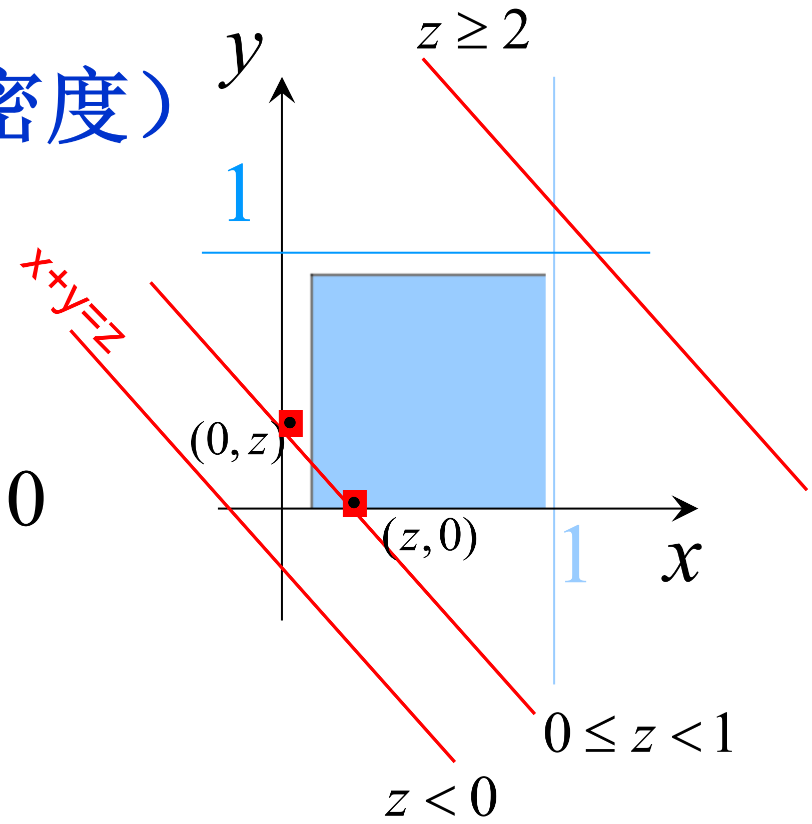
$$F_Z(z) = 1$$

$$f_Z(z) = 0$$



$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \text{或} z > 2 \\ z, & 0 < z < 1 \\ 2 - z, & 1 < z < 2 \end{cases}$$

另解（沿直线积分直接求密度）



当 $z < 0$ 或 $z \geq 2$ 时

$$f_Z(z) = \int_{\overline{AB}} f(x, y)dx = 0$$

当 $0 \leq z < 1$ 时

$$f_Z(z) = \int_{\overline{AB}} f(x, y)dx$$

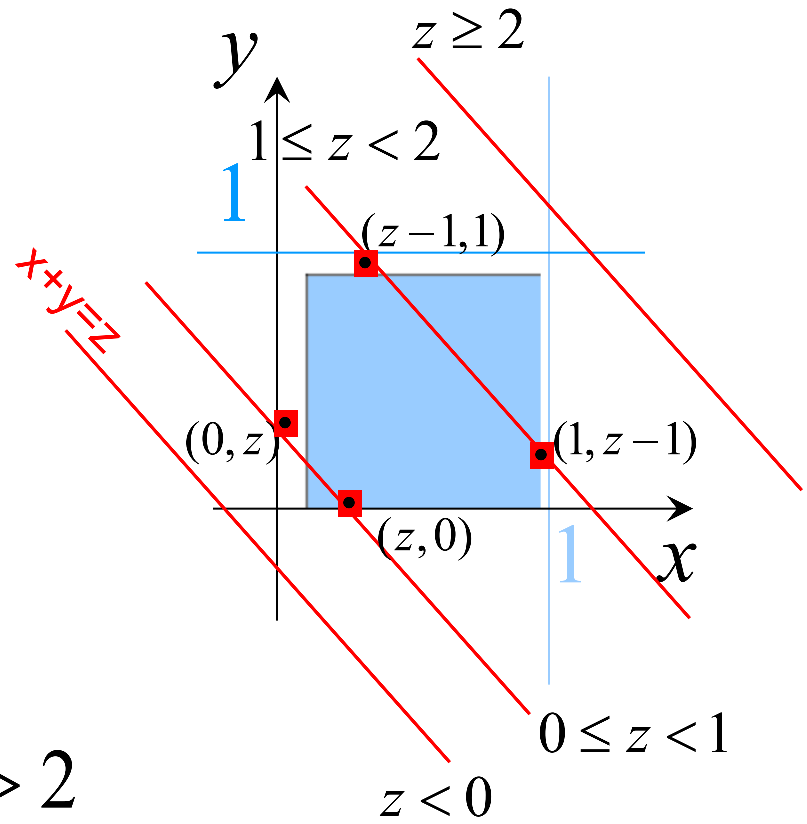
$$= \int_0^z 1dx \quad = z$$

当 $1 \le z < 2$ 时

$$f_Z(z) = \int_{\overline{AB}} f(x, y)dx$$

$$= \int_{z-1}^{1} 1dx$$

$$= 2 - z$$



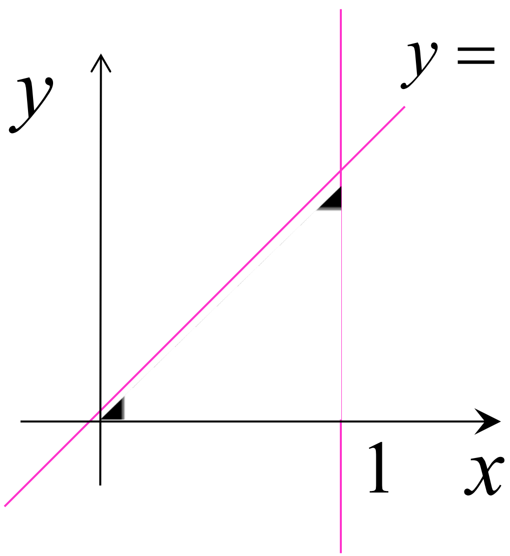
$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0\text{或}z > 2 \\ z, & 0 < z < 1 \\ 2 - z, & 1 < z < 2 \end{cases}$$

对于 X,Y 不相互独立的情形可同样的用直接求密度函数与通过分布函数求密度函数两种方法求和的分布

例2 已知 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<x<1, 0<y<x \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$Z=X+Y$,求 $f_Z(z)$



解（沿直线积分直接求密度）

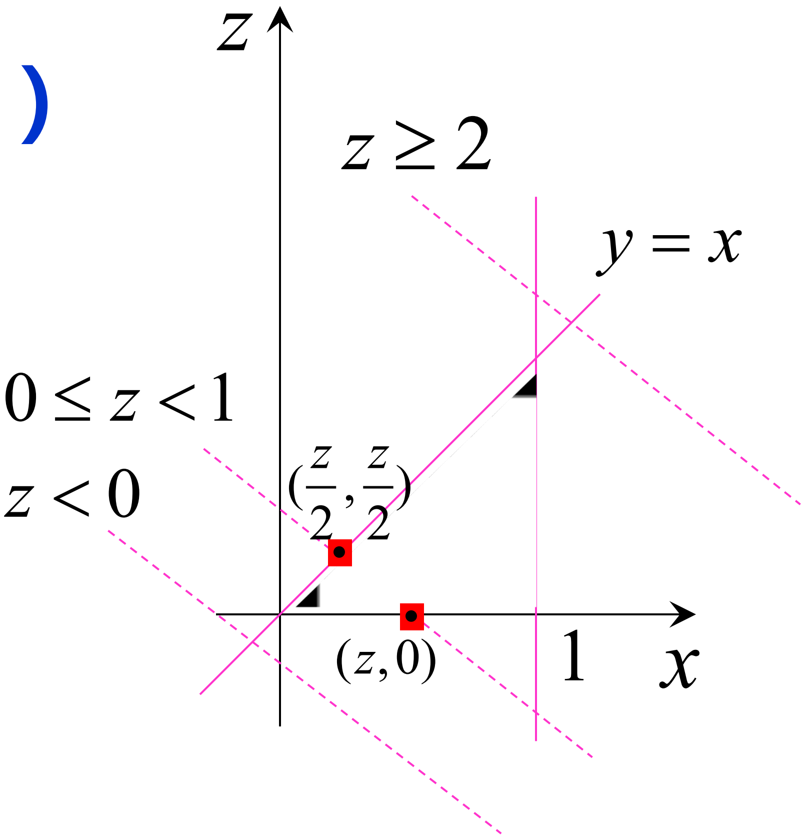
当 $z<0$ 或 $z\geq 2$ 时

$$f_Z(z)=\int_{\overline{AB}} f(x,y)dx=0$$

当 $0\leq z<1$ 时

$$f_Z(z)=\int_{\overline{AB}} f(x,y)dx$$

$$=\int_{\frac{z}{2}}^{z} 3x dx=\frac{9}{8}z^2$$

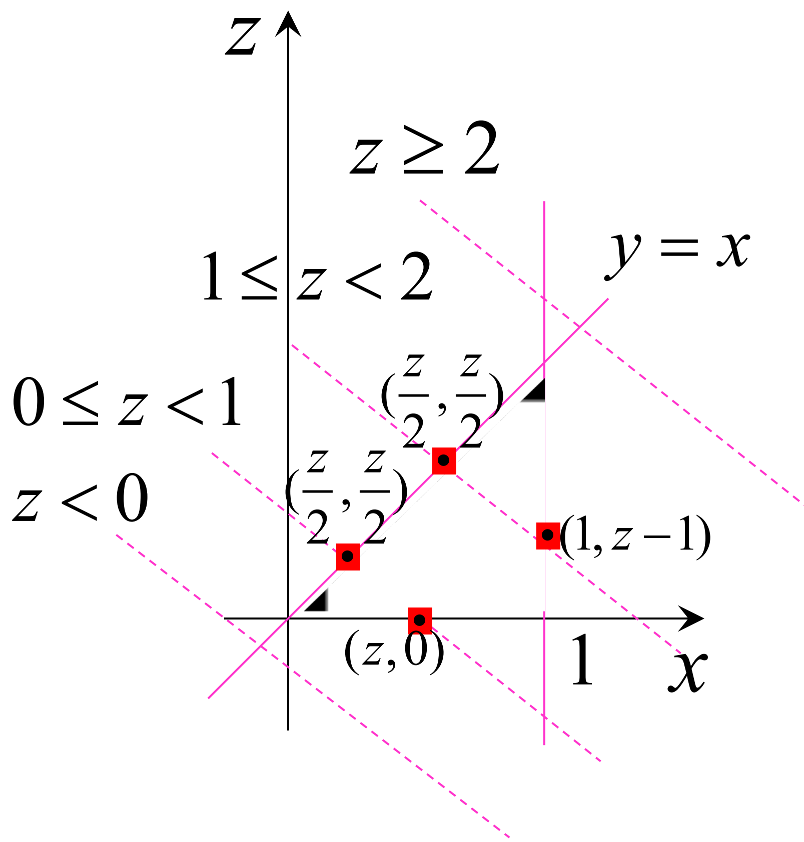


当 $1 \le z < 2$ 时

$$f_Z(z) = \int_{\overline{AB}} f(x, y) dx$$

$$= \int_{\frac{z}{2}}^{1} 3x dx$$

$$= \frac{3}{2}(1 - \frac{z^2}{4})$$



$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{9}{8}z^2, & 0<z<1\\ \dfrac{3}{2}(1-\dfrac{z^2}{4}), & 1<z<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

这比用分布函数做简便

推广1：已知 (X,Y)的联合密度 $f(x,y)$

求 $Z=aX+bY+c$ 的密度函数,

其中 a,b,c为常数，a，$b\neq 0$

$$f_Z(z)=\frac{1}{|b|}\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x,\frac{z-ax-c}{b}\right)dx \qquad -\infty<z<\infty \quad (a.e.)$$

$$=\int_{\overline{AB}}f(x,y)dx$$

$\overline{AB}$ 为有向直线$z=ax+by+c$

$$f_Z(z)=\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(\frac{z-by-c}{a},y\right)dy \qquad -\infty<z<\infty \quad (a.e.)$$

$$=\int_{\overline{BA}}f(x,y)dy$$

推广2：正态随机变量的情形

- 若X,Y相互独立, $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

  则 $X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

$$kX+c\sim N(k\mu_1+c,k^2\sigma_1^2)$$

$$aX+bY+c\sim N(a\mu_1+b\mu_2+c,a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2)$$

若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立,

$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1,2,\cdots,n$

则 $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2)$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + c \sim N(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i + c, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2)$$

- 若$(X, Y) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho)$

则 $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)$