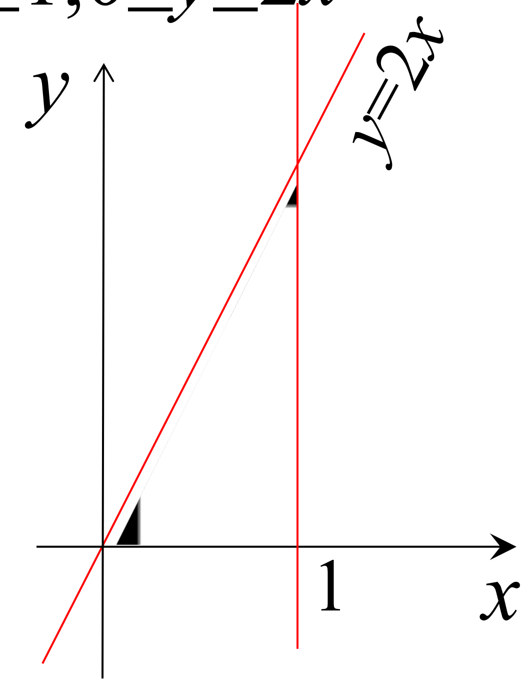
例1 已知 (X,Y) 在区域D：$0\le x\le 1, 0\le y\le 2x$ 上的均匀分布，

试求：(1) $Z=2X+Y$ 的概率密度

(2) $Z=X-Y$ 的概率密度



解: (X,Y) 的联合概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<2x \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

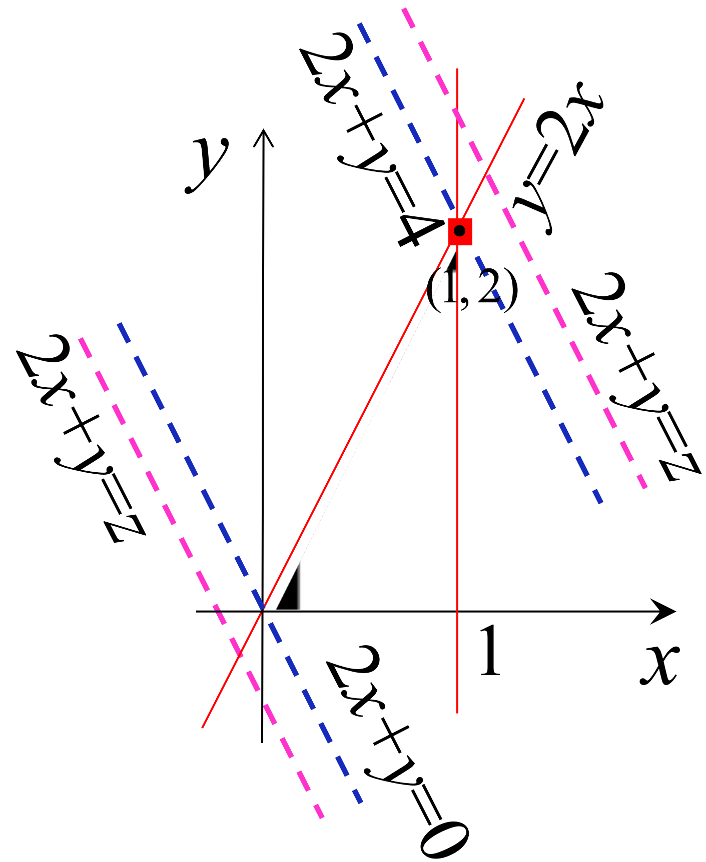
（沿直线积分直接求密度）

$$f_Z(z)=\int_{\overline{AB}} f(x,y)dx$$

$$=\int_{2x+y=z} f(x,y)dx$$

当$z<0$ 或 $z>4$时

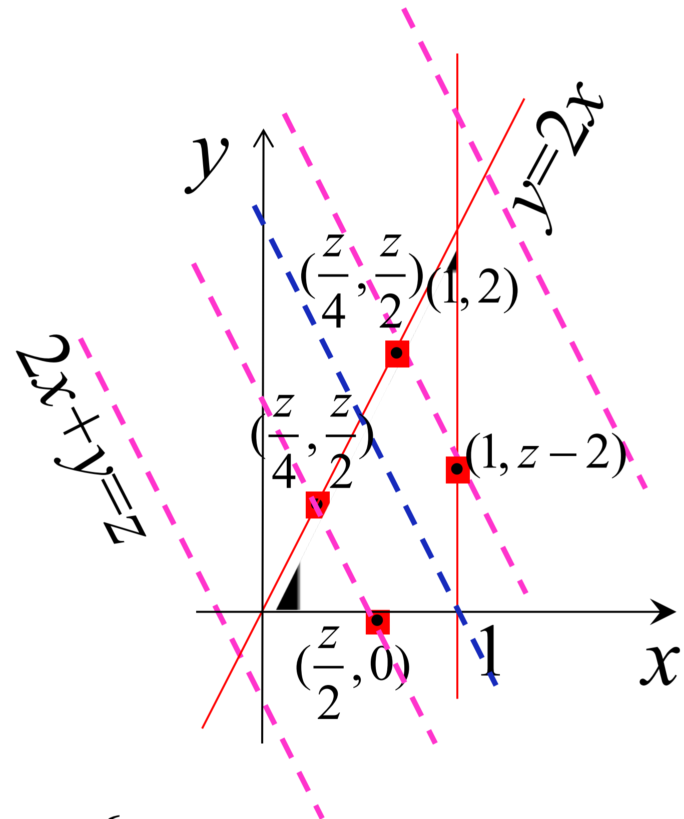
$$f_Z(z)=\int_{2x+y=z} 0dx \quad =0$$



当$0\le z\le 2$时

$$f_Z(z)=\int_{2x+y=z} f(x,y)dx$$

$$=\int_{\frac{z}{4}}^{\frac{z}{2}} 1dx = \frac{z}{4}$$



当$2< z\le 4$时

$$f_Z(z)=\int_{2x+y=z} f(x,y)dx$$

$$=\int_{\frac{z}{4}}^{1} 1dx = 1-\frac{z}{4}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{z}{4}, & 0<z<2\\ 1-\frac{z}{4}, & 2<z<4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

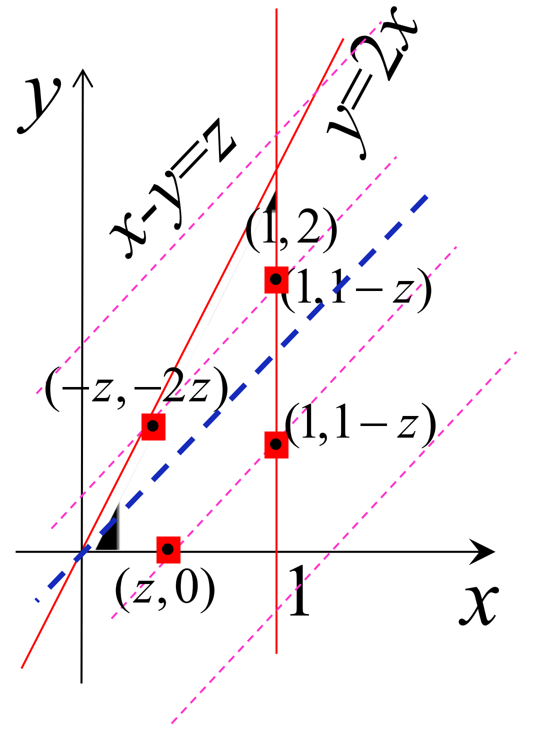
当$z<-1$或$z>1$时

$$f_Z(z)=\int_{x-y=z}0dx \quad =0$$

当$-1\le z\le 0$时

$$f_Z(z)=\int_{x-y=z}f(x,y)dx$$

$$=\int_{-z}^{1}1dx \;=1+z$$



当$0<z\le 1$时

$$f_Z(z)=\int_{x-y=z}f(x,y)dx$$

$$=\int_{z}^{1}1dx \;=1-z$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}1+z, & -1\le z<0\\ 1-z, & 0\le z<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(2) 极值分布：即极大值，极小值的分布

主要讨论相互独立的随机变量的极值分布

对于离散型随机变量的极值分布可直接计算

例2 X, Y 相互独立, $X, Y \sim$ 参数为0.5的0-1分布

求$M = \max\{X, Y\}$的概率分布

解

$Y \backslash X$ (p_{ij})	1	0
1	0.25	0.25
0	0.25	0.25

$\max\{X, Y\}$	1	0
P	0.75	0.25

$\min\{X, Y\}$	1	0
P	0.25	0.75

对于连续型随机变量，

设 X,Y 相互独立，$X \sim F_X(x),\ Y \sim F_Y(y)$，

$U=\max\{X,Y\},\ V=\min\{X,Y\}$，

求 U,V 的分布函数.

$$F_U(u)=P(\max\{X,Y\}\le u)$$

$$=P(X\le u,Y\le u)=P(X\le u)P(Y\le u)$$

$$=F_X(u)F_Y(u)$$

$$F_V(v)=P(\min\{X,Y\}\le v)=1-P(\min\{X,Y\}>v)$$

$$=1-P(X>v,Y>v)=1-P(X>v)P(Y>v)$$

$$=1-(1-F_X(v))(1-F_Y(v))$$

推广至相互独立的 n 个随机变量的情形：

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且

$$X_i \sim F_i(x_i), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

$$U = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$$

$$V = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$$

则

$$F_U(u) = \prod_{i=1}^{n} F_i(u)$$

$$F_V(v) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - F_i(v))$$

例3 设系统 L 由相互独立的 n 个元件组成，连接方式为

(1) 串联；
(2) 并联；
(3) 冷贮备(起初由一个元件工作，其它 $n-1$ 个元件做冷贮备，当工作元件失效时，贮备的元件逐个地自动替换)；

如果 n 个元件的寿命分别为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 且

$$X_i \sim E(\lambda), \quad i = 1,2,\cdots,n$$

求在以上 3 种组成方式下，系统 L 的寿命 X 的密度函数.

解

$$f_{X_i}(x_i)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x_i}, & x_i>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$F_{X_i}(x_i)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x_i}, & x_i>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(1) $X=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$

$$F_X(x)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-F_{X_i}(x))$$

$$F_{X_i}(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$1-F_{X_i}(x)=\begin{cases} e^{-\lambda x}, & x>0, \\ 1, & x\le 0 \end{cases}$$

$$\prod_{i=1}^{n}(1-F_{X_i}(x))=\begin{cases} (e^{-\lambda x})^n, & x>0, \\ 1, & x\le 0 \end{cases}$$

$$F_X(x)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-F_{X_i}(x))=\begin{cases} 1-(e^{-\lambda x})^n, & x>0, \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases} n\lambda e^{-n\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

(2) $X = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$

$$F_{X_i}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x)$$

$$= \begin{cases} (1 - e^{-\lambda x})^n, & x > 0, \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} n\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{n-1}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

(3) $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

$n = 2$ 时，

$$f_{X_1+X_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{X_2}(x-t)\,dt$$

$$= \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

可以证明，X_1+X_2与X_3也相互独立，故

$$f_{X_1+X_2+X_3}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1+X_2}(t)f_{X_3}(x-t)dt$$

$$=\begin{cases} \dfrac{\lambda^2 x^2}{2!}e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

归纳地可以证明，

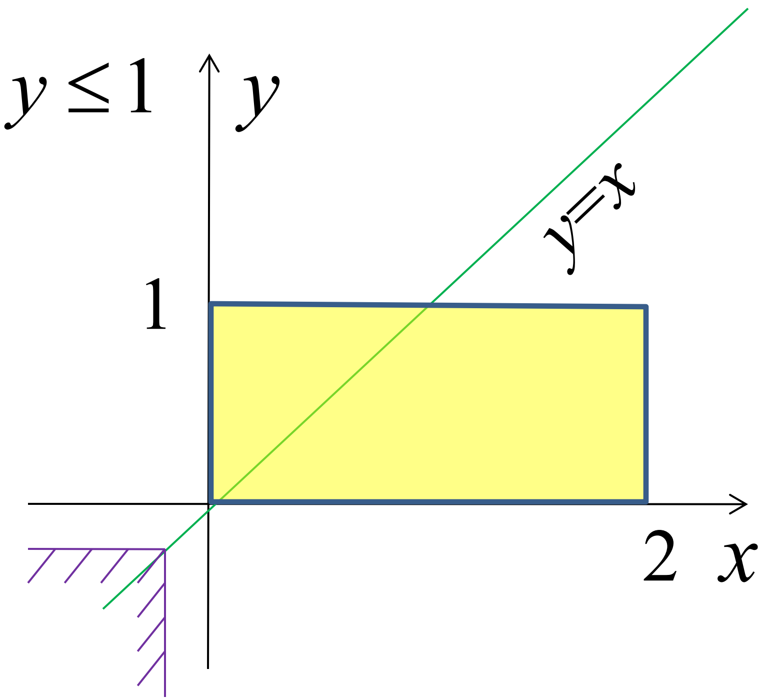
$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

例4设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}(2x+y),0\le x\le 2,0\le y\le 1\\ 0,其它\end{cases}$$

(1)求max(X,Y)的概率密度;

(2)求min(X,Y)的概率密度;



解 (1)

$$F_{\max}(z)=P(\max(X,Y)\le z)$$
$$=P(X\le z,Y\le z)$$
$$=\iint\limits_{\substack{x\le z\\ y\le z}} f(x,y)dxdy$$

(a)当$z<0$时;

$$F_{\max}(z)=0$$

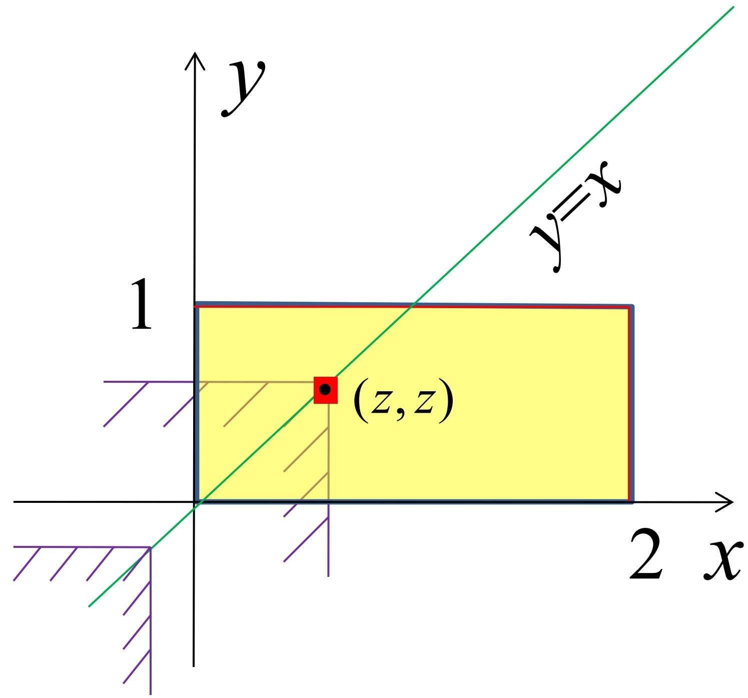
(b)当$0\le z<1$时;

$$F_{\max}(z)=\iint\limits_{\substack{x\le z\\ y\le z}} f(x,y)\,dxdy$$

$$=\int_0^z\int_0^z \frac{1}{5}(2x+y)\,dydx$$

$$=\int_0^z \frac{1}{5}(2xz+\frac{1}{5}z^2)\,dx$$

$$=\frac{3}{10}z^3$$



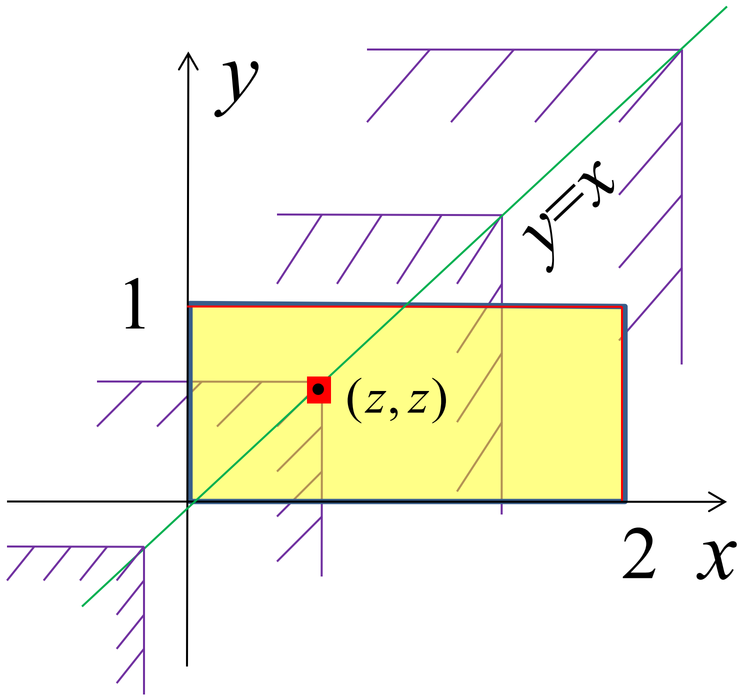
(*c*)当$1\leq z<2$时;

$$F_{\max}(z)=\iint\limits_{\substack{x\leq z\\ y\leq z}} f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^z\int_0^1\frac{1}{5}(2x+y)dydx$$

$$=\int_0^z\frac{1}{5}(2x+\frac{1}{2})dx$$

$$=\frac{1}{5}z^2+\frac{1}{10}z$$



(*d*)当$z\geq 2$时; $F_{\max}(z)=1$

$$F_{\max}(z)=\begin{cases} 0, & z<0 \\ \dfrac{3}{10}z^3, & 0\le z<1 \\ \dfrac{1}{5}z^2+\dfrac{1}{10}z, & 1\le z<2 \\ 1 & z\ge 2 \end{cases}$$

$$f_{\max}(z)=\begin{cases} \dfrac{9}{10}z^3, & 0\le z<1 \\ \dfrac{2}{5}z+\dfrac{1}{10}, & 1\le z<2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

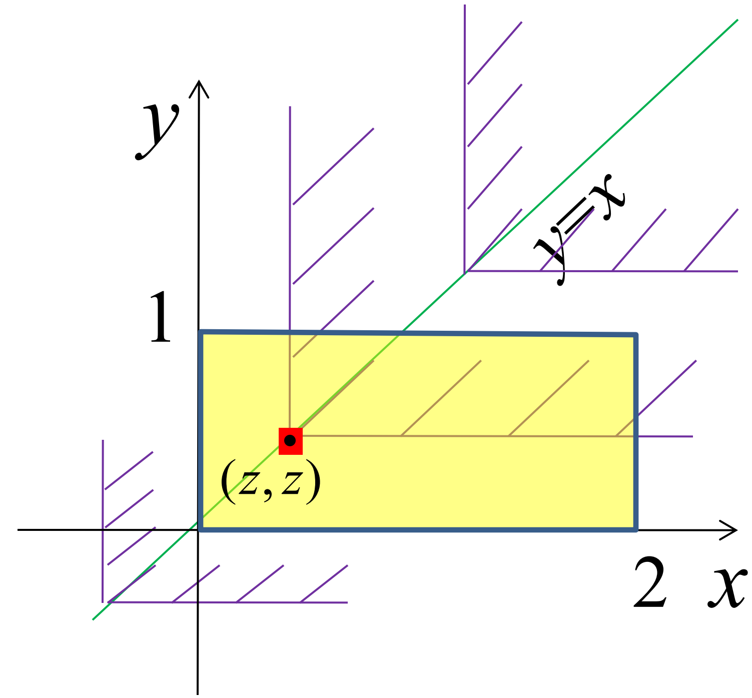
$$\neq P(X \le z, Y \le z)$$

解 (2)

$$F_{\min}(z) = P(\min(X,Y) \le z)$$

$$= 1 - P(\min(X,Y) > z)$$

$$= 1 - \iint\limits_{\substack{x>z \\ y>z}} f(x,y)dxdy$$



(a)当$z>1$时;

$$F_{\min}(z) = 1 - 0 \quad = 1$$

(b)当$0<z\le 1$时;

$$F_{\min}(z) = 1 - \int_z^2 \int_z^1 \frac{1}{5}(2x+y)dydx$$

$$= -\frac{3}{10}z^3 + \frac{2}{5}z^2 + \frac{9}{10}z$$

(d)当$z<0$时;

$$F_{\min}(z) = 1 - 1$$

$$= 0$$

$$F_{\max}(z)=\begin{cases} 0, & z<0 \\ -\dfrac{3}{10}z^3+\dfrac{2}{5}z^2+\dfrac{9}{10}z, & 0\le z<1 \\ 1, & z\ge 1 \end{cases}$$

$$f_{\min}(z)=\begin{cases} -\dfrac{9}{10}z^2+\dfrac{4}{5}z+\dfrac{9}{10}, & 0\le z<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(3) 平方和的分布： $Z=X^2+Y^2$

设(X,Y)的联合密度函数为$f(x,y)$

则 $F_Z(z)=P(X^2+Y^2\le z)$

$$=\begin{cases}0, & z<0,\\ \iint_{x^2+y^2\le z} f(x,y)dxdy & z\ge 0,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & z<0,\\ \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{z}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr, & z\ge 0,\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(\sqrt{z}\cos\theta,\sqrt{z}\sin\theta)d\theta, & z\ge 0,\end{cases}$$

例如，$X \sim N(0,1), Y \sim N(0,1), X, Y$ 相互独立，$Z = X^2 + Y^2$，则

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z\cos^2\theta}{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z\sin^2\theta}{2}} d\theta, & z \geq 0, \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \dfrac{1}{2} e^{-\frac{z}{2}}, & z \geq 0, \end{cases}$$

称为自由度为2的χ^2分布

若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且

$$X_i \sim N(0,1), \quad i = 1,2,\cdots,n$$

则 $Z = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ 所服从的分布称为

自由度为n 的 χ^2分布

它的概率密度函数为

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} z^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}}, & z \geq 0, \end{cases}$$

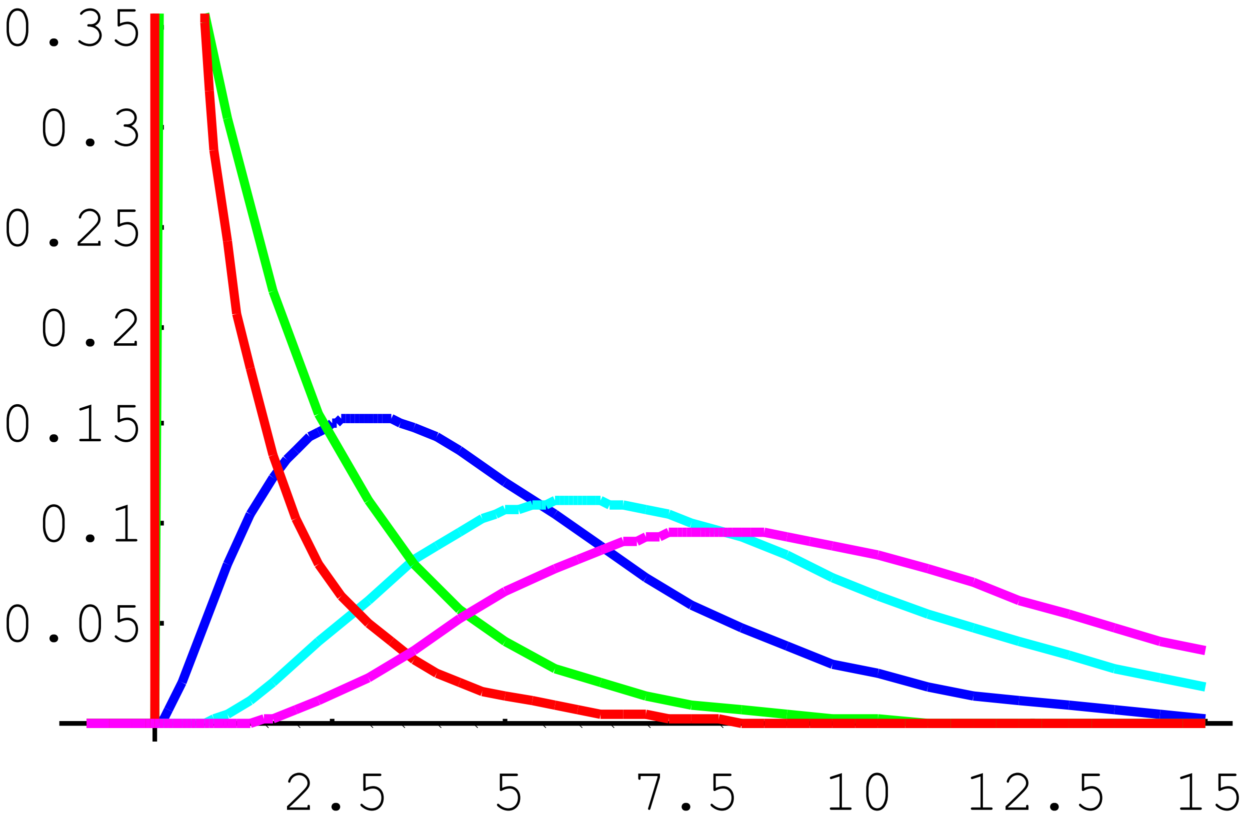
其中 $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \qquad x > 0$ —— 称为Γ函数

$$\Gamma(1)=1,\ \ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x),\ \ \Gamma(n+1)=n!$$

自由度分别为1,2,5,8,10的

χ^2分布的密度函数图形



自由度分别为1,2,5,8,10的 χ^2分布的密度函数图形