第五章 随机变量的数字特征

分布函数能够完整地描述随机变量的统计特性，但在一些实际问题中，只需知道随机变量的某些特征，因而不需要求出它的分布函数.

例如：

评定某企业的经营能力时，只要知道该企业**人均赢利水平**；

研究水稻品种优劣时，我们关心的是稻穗的**平均粒数**及每粒的**平均重量**；

检验棉花的质量时，既要注意纤维的**平均长度**，又要注意 **纤维长度与平均长度的偏离程度**，平均长度越长、偏离程度越小，质量就越好;

考察一射手的水平，既要看他的平均环数是否高，还要看他弹着点的范围是否小，即数据的波动是否小.

由上面例子看到，与随机变量有关的某些数值，虽不能完整地描述随机变量，但能清晰地描述随机变量在某些方面的重要特征，这些数字特征在理论和实践上都具有重要意义.

随机变量某一方面的概率特性

可用**数字**来描写

本章内容

- 随机变量的平均取值 —— 数学期望
- 随机变量取值平均偏离平均值的情况 —— 方差
- 描述两个随机变量之间的某种关系的数 —— 协方差与相关系数

§5.1 随机变量的数学期望

引例1 测量 50 个圆柱形零件直径（见下表）

尺寸（cm）	8	9	10	11	12	
数量（个）	8	7	15	10	10	50

则这 50 个零件的平均直径为

$$\frac{8\times 8+9\times 7+10\times 15+11\times 10+12\times 10}{50}$$

$$=8\times\frac{8}{50}+9\times\frac{7}{50}+10\times\frac{15}{50}+11\times\frac{10}{50}+12\times\frac{10}{50}\quad=10.14cm$$

换一个角度看，从一堆零件中任取一个零件，它的尺寸为随机变量X，且X的概率分布为

X	8	9	10	11	12
P	$\frac{8}{50}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{15}{50}$	$\frac{10}{50}$	$\frac{10}{50}$

则加 权 平 均

$$8\times\frac{8}{50}+9\times\frac{7}{50}+10\times\frac{15}{50}+11\times\frac{10}{50}+12\times\frac{10}{50}$$

$$=\sum_{k=8}^{12}k\times P(X=k)=\sum_{k=8}^{12}kp_k=10.14$$

可以表示这堆零件的平均直径， 称之为数学期望

数学期望的定义

定义1 设 X 为离散型随机变量，其概率分布为

$$P(X=x_k)=p_k,\quad k=1,2,\cdots$$

若无穷级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$$

绝对收敛，则称其和为随机变量 X 的数学期望，记作 $E(X)$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$$

定义2 设 X 为连续型随机变量, 其密度函数为 $f(x)$

若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 绝对收敛,

则称此积分为随机变量 X 的数学期望, 记作 $E(X)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

随机变量的数学期望的本质 —— 加权平均, 它是一个数不再是随机变量

例1　$X \sim B(n,\ p)$, 求 $E(X)$.

解　$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= np \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k p^k (1-p)^{(n-1)-k}$$

$$= np$$

例2 $X \sim N(\mu, \ \sigma^2)$, 求 $E(X)$.

解 $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\overset{令\frac{x-\mu}{\sigma}=y}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} (y\sigma+\mu) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2}} \sigma dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} y\sigma \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty} \mu \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$= \mu$$

常见随机变量的数学期望

分布	概率分布	期望
参数为p 的 0-1分布	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=1-p$	p
$B(n,p)$	$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ $k=0,1,2,\cdots,n$	np
$P(\lambda)$	$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $k=0,1,2,\cdots$	λ

分布	概率密度	期望
区间(a,b)上的均匀分布	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$
$E(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$
$N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ

注意：不是所有的随机变量都有数学期望

例如：Cauchy分布的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},\qquad -\infty<x<+\infty$$

但 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|}{\pi(1+x^2)}dx$ 发散

它的数学期望不存在

随机变量函数的数学期望

- 设X为离散型随机变量，概率分布为

$$P(X=x_i)=p_i,\quad i=1,2,\cdots$$

$Y=g(X)$,

若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$ 绝对收敛，则

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$$

$$E(g(X))=\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$$

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{\infty} y_i p(Y=y_i)$$

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{\infty} y_i\, p(Y=y_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\left\{ g(x_j)\sum_{g(x_j)=y_i} p(x_j)\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\left\{ \sum_{g(x_j)=y_i} g(x_j)\,p(x_j)\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)\,p(x_k)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)\,p_i$$

❑ 设X为连续型随机变量，密度函数为$f(x)$

$Y = g(X)$,

若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$ 绝对收敛，则

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

- 设(X,Y)为二维离散型随机变量，概率分布为

$$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots$$

$Z=g(X,Y)$,

若级数 $\sum_{i,j=1}^{\infty} g(x_i,y_j)p_{ij}$ 绝对收敛，则

$$E(Z)=\sum_{i,j=1}^{\infty} g(x_i,y_j)p_{ij}$$

$$E(g(X,Y))=\sum_{i,j=1}^{\infty} g(x_i,y_j)p_{ij}$$

- 设(X, Y)为二维连续型随机变量，密度函数为$f(x, y)$

$Z = g(X, Y)$,

若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dxdy$ 绝对收敛，则

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dxdy$$

$$E(g(X, Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dxdy$$

几个重要的随机变量函数的数学期望

$E(X^k)$ —— X的 k 阶原点矩

$E(X)$ —— X的 数学期望

$E(|X|^k)$ —— X的 k 阶绝对原点矩

$E((X-E(X))^k)$ —— X的 k 阶中心矩

$E((X-E(X))^2)=D(X)$ —— X的 方差

$E(X^k Y^l)$ —— X,Y 的 $k+l$ 阶混合原点矩

$E\left((X-E(X))^k (Y-E(Y))^l\right)$

—— X,Y 的 $k+l$ 阶混合中心矩

$E(XY)$ —— X,Y 的 二阶原点矩

$E\left((X-E(X))(Y-E(Y))\right)$

—— X,Y 的二阶混合中心矩

X,Y 的协方差

$$E\left(\frac{(X-E(X))(Y-E(Y))}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}\right)=\rho_{XY}$$

—— X,Y 的相关系数

例4 设二维连续型随机变量(X, Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}x(1+3y^2), & 0<x<2, 0<y<1,\\ 0, & 其它\end{cases}$$

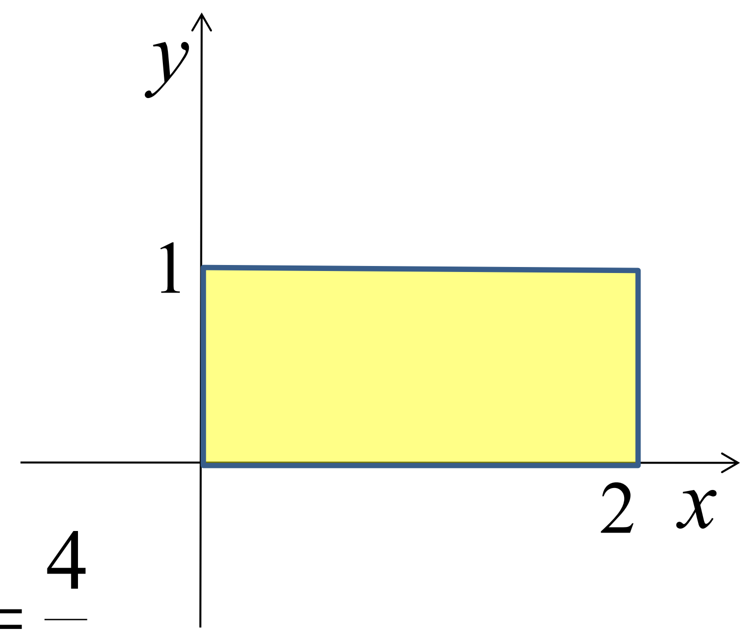
求$E(X), E(Y), E(X+Y), E(XY), E(Y/X)$

解

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^2\int_0^1 x\cdot\frac{1}{4}x(1+3y^2)dydx$$

$$=\int_0^2 x\cdot\frac{1}{4}xdx\int_0^1(1+3y^2)dy=\frac{4}{3}$$



$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^2\int_0^1 y\cdot\frac{1}{4}x(1+3y^2)dydx$$

$$=\int_0^2\frac{1}{4}xdx\int_0^1 y(1+3y^2)dy=\frac{5}{8}$$

$$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy$$

$=E(X)+E(Y)$ —— 数学期望的性质

$$=\frac{4}{3}+\frac{5}{8}=\frac{47}{24}$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(xy)f(x,y)dxdy$$

$$= \int_0^2\int_0^1 xy \cdot \frac{1}{4}x(1+3y^2)dydx$$

$$= \int_0^2 x \cdot \frac{1}{2}xdx \quad \cdot \int_0^1 y \cdot \frac{1}{2}(1+3y^2)dy$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{6}$$

$$= E(X) \cdot E(Y)$$

—— 数学期望的性质

注意：X, Y 相互独立

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}x(1+3y^2), & 0<x<2, 0<y<1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$E\left(\frac{Y}{X}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{y}{x}\right)f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^2\int_0^1\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{4}x(1+3y^2)dydx$$

$$=\int_0^2\frac{1}{2}dx\int_0^1 y\cdot\frac{1}{2}(1+3y^2)dy$$

$$=\frac{5}{8}$$