例5 设 $(X,Y)\sim N(0,1;0,1;0)$，求 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的数学期望.

解 $$E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}f(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{+\infty}r\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}rdr\right)d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}d\theta=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\cdot 2\pi\ =\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^{+\infty} r\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}rdr = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} r^2 e^{-\frac{r^2}{2}}dr$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} r^2\frac{1}{-r}de^{-\frac{r^2}{2}} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} rde^{-\frac{r^2}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left[re^{-\frac{r^2}{2}}\Bigg|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}dr\right] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}dr$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}dr = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}dr$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}$$

例6 五个独立元件，寿命分别为 $X_1, X_2, \cdots, X_5$，都服从参数为 λ 的指数分布，若将它们

(1) 串联；　　(2) 并联

成整机，求整机寿命的均值.

解 (1) 设整机寿命为 N，$N = \min\limits_{k=1,2,\cdots,5}\{X_k\}$

$$F_N(x) = 1 - \prod_{k=1}^{5}(1 - F_k(x)),$$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-5\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

$$f_N(x)=\begin{cases}5\lambda e^{-5\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

即 $N\sim E(5\lambda)$, $\quad E(N)=\dfrac{1}{5\lambda}$

(2) 设整机寿命为 $M=\max\limits_{k=1,2,\cdots,5}\{X_k\}$

$$F_M(x)=\prod_{k=1}^{5}F_k(x)=\begin{cases}(1-e^{-\lambda x})^5, & x>0,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

$$f_M(x)=\begin{cases}5\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^4, & x>0,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

$$E(M)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_M(x)dx$$

$$=\int_0^{+\infty}5\lambda xe^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^4dx$$

$$=\frac{137}{60\lambda}$$

$$\frac{E(M)}{E(N)}=\frac{137/60\lambda}{1/5\lambda}>11$$

可见，并联组成整机的平均寿命比串联组成整机的平均寿命长11倍之多.

例7 设$X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(0,1)$, X, Y相互独立，求 $E(\max(X,Y))$.

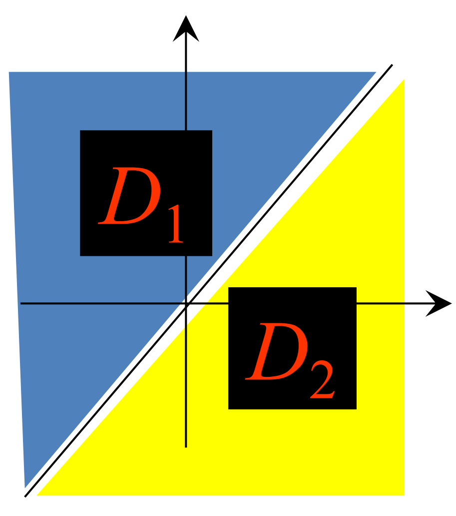
解 $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$E(\max\{X,Y\}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \max\{x,y\} f(x,y)\,dxdy$$

$$= \iint_{D_1} \max\{x,y\} f(x,y)\,dxdy$$

$$+ \iint_{D_2} \max\{x,y\} f(x,y)\,dxdy$$



$$=\iint_{D_1} y\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy+\iint_{D_2} x\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

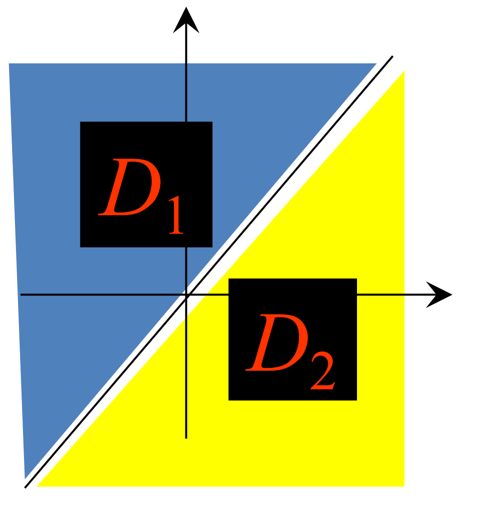
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\int_{x}^{+\infty}ye^{-\frac{y^2}{2}}dy+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy\int_{y}^{+\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\boxed{\int_{x}^{+\infty}ye^{-\frac{y^2}{2}}dy}=\int_{x}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}d\frac{y^2}{2}=-e^{-\frac{y^2}{2}}\Big|_{x}^{+\infty}$$

$$=e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{1}{\pi}\cdot\sqrt{\pi}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$



其中$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$

称为泊松-欧拉积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \boxed{\int_0^{+\infty} e^{-r^2} rdr}$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-r^2} \frac{1}{2} dr^2$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$= 2\pi \times \frac{1}{2} = \pi$$

所以 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

一般地，若 $X \sim N(\mu,\sigma^2), Y \sim N(\mu,\sigma^2)$,

X, Y 相互独立，则

$$E(\max\{X,Y\}) = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

$$E(\min\{X,Y\}) = \mu - \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

数学期望的性质

1、 $E(C)=C$

2、 $E(aX)=aE(X)$

3、 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i+C\right)=\sum_{i=1}^{n}a_iE(X_i)+C$$

4、当X,Y相互独立时，$E(XY)=E(X)E(Y)$.

证明：$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

证：以离散情况为例

$$E(X+Y)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(x_i+y_j)p_{ij}$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}x_i p_{ij}+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}y_j p_{ij}$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}+\sum_{j=1}^{\infty}y_j\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_{i\cdot}+\sum_{i=1}^{\infty}y_j p_{\cdot j}$$

$$=E(X)+E(Y)$$

证明：当X, Y相互独立时，$E(XY) = E(X)E(Y)$.

证：以离散情况为例

$$E(XY) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(x_i \cdot y_j)p_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}x_i p_{i\cdot} \cdot y_j p_{\cdot j}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}x_i p_{i\cdot} \cdot \sum_{j=1}^{\infty}y_j p_{\cdot j}$$

$$= E(X) \cdot E(Y)$$

注 性质 4 的逆命题不成立，即

若$E(XY)=E(X)E(Y)$，X,Y不一定相互独立

反例 1

Y \ X (p_{ij})	-1	0	1	$p_{\cdot j}$
-1	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$3/8$
0	$1/8$	0	$1/8$	$2/8$
1	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$3/8$
$p_{i\cdot}$	$3/8$	$2/8$	$3/8$	

XY	-1	0	1
P	$2/8$	$4/8$	$2/8$

$$E(X)=E(Y)=0; \qquad E(XY)=0;$$

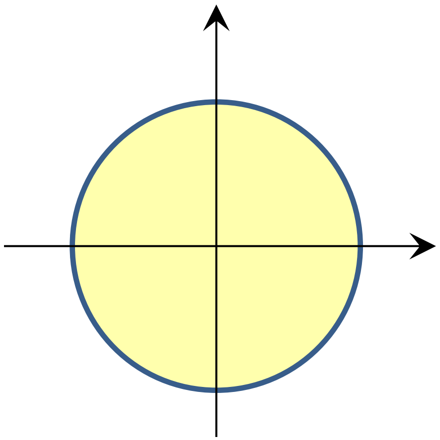
$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

但 $$P(X=-1,Y=-1)=\frac{1}{8}$$

$$\neq P(X=-1)P(Y=-1)=\left(\frac{3}{8}\right)^2$$

反例 2 $(X,Y) \sim U(D), \quad D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 \le 1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, & -1 < x < 1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-1}^{1} x \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi} dx = 0; \quad f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}, & -1 < y < 1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$E(XY) = \iint\limits_{x^2+y^2 \le 1} xy \frac{1}{\pi} dxdy = 0;$$

$$E(XY) = 0 = E(X)E(Y)$$

$$f(x,y) \ne f_X(x) f_Y(y)$$

例8 将 4 个可区分的球随机地放入 4 个盒子中，每盒容纳的球数无限，求空着的盒子数的数学期望.

解一 设 X 为空着的盒子数, 则 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{4!}{4^4}$	$\dfrac{C_4^1C_4^2P_3^3}{4^4}$	$\dfrac{C_4^2(C_4^2+C_2^1C_4^3)}{4^4}$	$\dfrac{C_4^1}{4^4}$

$$E(X)=\frac{81}{64}$$

解二 引入 $X_i, i = 1,2,3,4$

$$X_i = \begin{cases} 1, & 第 i 盒空, \\ 0, & 其它, \end{cases}$$

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$$

X_i	1	0
P	$\left(\frac{3}{4}\right)^4$	$1-\left(\frac{3}{4}\right)^4$

$$E(X_i) = \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

$$E(X) = 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{64}$$

例：将100只铅笔随机的分给80个孩子，如果每支铅笔分给哪个孩子是等可能的，问：平均有多少孩子得到铅笔？

解 引入 $X_i, i = 1,2,\ldots\ldots, 80$

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{个孩子得到了铅笔}, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{80}$$

X_i	1	0
P	$1-\left(\frac{79}{80}\right)^{100}$	$\left(\frac{79}{80}\right)^{100}$

$$E(X_i) = 1-\left(\frac{79}{80}\right)^{100}$$

$$E(X) = E(\sum_{i=1}^{80} X_i) = 80\left[1-\left(\frac{79}{80}\right)^{100}\right]$$