§4.2 方差

引例 甲、乙两射手各打了10发子弹，每发子弹击中的环数分别为：

甲	10, 6, 7, 10, 8, 9, 9, 10, 5, 10
乙	8, 7, 9, 10, 9, 8, 7, 9, 8, 9

有六个不同数据

仅有四个不同数据

问哪一个射手的技术较好？

解 首先比较平均环数

$\overline{甲} = 8.4, \qquad \overline{乙} = 8.4$

再比较稳定程度

$$\sum_{i=1}^{10}(x_i - \overline{x})$$

$$\sum_{i=1}^{10}|x_i - \overline{x}|$$

$$\sum_{i=1}^{10}(x_i - \overline{x})^2$$

$$\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})^2$$

甲:

$$4\times(10-8.4)^2+2\times(9-8.4)^2+(8-8.4)^2$$

$$+(7-8.4)^2+(6-8.4)^2+(5-8.4)^2$$

$$=30.4$$

乙:

$$(10-8.4)^2+4\times(9-8.4)^2$$

$$+3\times(8-8.4)^2+2\times(7-8.4)^2$$

$$=6.44$$

乙比甲技术稳定

进一步比较平均偏离平均值的程度

甲 $$\frac{1}{10}\{4\times(10-8.4)^2+2\times(9-8.4)^2+(8-8.4)^2$$

$$+(7-8.4)^2+(6-8.4)^2+(5-8.4)^2\}$$

$$=3.04 \triangleq \sum_{k=1}^{6}\left(x_k-E(X)\right)^2 p_k$$

乙 $$\frac{1}{10}\{(10-8.4)^2+4\times(9-8.4)^2$$

$$+3\times(8-8.4)^2+2\times(7-8.4)^2\}$$

$$=0.644 \triangleq \sum_{k=1}^{4}\left(x_k-E(X)\right)^2 p_k$$

方差的概念

定义 若$E((X-E(X))^2)$存在，则称其为随机变量X的**方差**，记为$D(X)$

$$D(X)=E((X-E(X))^2)$$

称 $\sqrt{D(X)}$ 为X的**均方差**.

$(X-E(X))^2$ —— 随机变量X的取值偏离平均值的情况，是X的函数，也是随机变量

$E(X-E(X))^2$ —— 随机变量X的取值偏离平均值的平均偏离程度—— 数

若 X 为离散型 **r.v.**，概率分布为

$$P(X = x_k) = p_k, \quad k = 1,2,\cdots$$

$$D(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} (x_k - E(X))^2 p_k$$

若 X 为连续型，概率密度为 $f(x)$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx$$

常用的计算方差的公式:

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$D(X) = E((X - E(X))^2)$$

$$= E(X^2 - 2X \cdot E(X) + E^2(X))$$

$$= E(X^2) - E(X) \cdot 2 \cdot E(X) + E^2(X)$$

$$= E(X^2) - E^2(X)$$

方差的计算

例1 设$X \sim P(\lambda)$, 求$D(X)$.

解 $$E(X)=\sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k-1=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\lambda^m}{m!} \quad = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda}$$

$$= \lambda$$

$$= \lambda$$

$$E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X)$$

$$E(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2$$

$$\Rightarrow \quad E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$$

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = (\lambda^2 + \lambda) - \lambda^2 = \lambda$$

例3 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求 $D(X)$

解 $D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$

$$\overset{令\frac{x-\mu}{\sigma}=y}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma^2y^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

$$=\sigma^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\sigma^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2\frac{1}{-y}de^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$=-\sigma^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}yde^{-\frac{y^2}{2}}=-\sigma^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[ye^{-\frac{y^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right]$$

$$=\sigma^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\sigma^2$$

常见随机变量的方差

分布	概率分布	方差
参数为p 的0-1分布	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=1-p$	$P(1\text{-}p)$
$B(n,p)$	$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,2,\cdots,n$	$np(1\text{-}p)$
$P(\lambda)$	$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $k=0,1,2,\cdots$	λ

分布	概率密度	方差
区间(a,b)上的均匀分布	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
$E(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
$N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	σ^2

方差的性质

- $D(C)=0$
- $D(aX)=a^2D(X)$

$$\left.\begin{array}{l} D(C)=0 \\ D(aX)=a^2D(X) \end{array}\right\} D(aX+b)=a^2D(X)$$

性质 1： $D(C)=0$

证明: $$D(C)=E\left(C-E(C)\right)^2=0$$

性质 2： $D(aX)=a^2D(X)$

证明: $$D(aX+b)=E\left((aX+b)-E(aX+b)\right)^2$$

$$=E\left(a(X-E(X))+(b-E(b))\right)^2$$

$$=E\left(a^2(X-E(X))^2\right)=a^2D(X)$$

性质 3 : $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$

$$\pm 2E\big((X - E(X))(Y - E(Y))\big)$$

证明:

$$D(X \pm Y) = E\big((X \pm Y) - E(X \pm Y)\big)^2$$

$$= E\big((X - E(X)) \pm (Y - E(Y))\big)^2$$

$$= E(X - E(X))^2 + E(Y - E(Y))^2$$

$$\pm 2E\big((X - E(X))(Y - E(Y))\big)$$

$$= D(X) + D(Y)$$

$$\pm 2E\big((X - E(X))(Y - E(Y))\big)$$

注意到， $E\big((X - E(X))(Y - E(Y))\big)$

$$= E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$$
$$\pm 2E\big((X - E(X))(Y - E(Y))\big)$$
$$= D(X) + D(Y)$$
$$\pm 2\big(E(XY) - EX \cdot EY\big)$$

特别地，若X, Y相互独立，则

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$$

若X, Y相互独立

$$\begin{array}{c}\Rightarrow \\ \not\Leftarrow\end{array} \quad D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$$

$$\Leftrightarrow \quad E(XY) = E(X)E(Y)$$

若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，$a_1, a_2, \cdots, a_n, b$ 为常数

则 $$D\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D(X_i)$$

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right) = D\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} D\left(a_i X_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D(X_i)$$

- 对任意常数C, $D(X) \le E(X-C)^2$,
  当且仅当$C = E(X)$时等号成立

证明: $E(X-C)^2 = E\big((X-E(X))-(C-E(X))\big)^2$

$$= E(X-E(X))^2 + (C-E(X))^2$$

$$= D(X) + (C-E(X))^2$$

当$C = E(X)$时，显然等号成立;

当$C \ne E(X)$时，$(C-E(X))^2 > 0$

$$E(X-C)^2 > D(X)$$

- $D(X) = 0 \Longleftrightarrow P(X = E(X)) = 1$

  称为X依概率 1 等于常数$E(X)$

例4 已知X,Y相互独立，且都服从 $N(0,0.5)$，求 $E(|X-Y|)$.

解 $X \sim N(0,0.5), \quad Y \sim N(0,0.5)$

$$E(X-Y)=0, \quad D(X-Y)=1$$

故 $X-Y \sim N(0,1)$ 记为 $Z \sim N(0,1)$

$$E(|X-Y|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=2\int_{0}^{+\infty}z\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}ze^{-\frac{z^2}{2}}dz=-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}d\left(-\frac{z^2}{2}\right)$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

例5 设X表示独立射击直到击中目标 n 次为止所需射击的次数，已知每次射击中靶的概率为 p ，求$E(X), D(X)$.

解 令 X_i 表示击中目标 i - 1 次后到第 i 次击中目标所需射击的次数，$i = 1,2,\ldots, n$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立， 且 $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$P(X_i = k) = pq^{k-1}, \quad k = 1,2,\cdots$$

$$p + q = 1$$

$$E(X_i) = \sum_{k=1}^{+\infty} kpq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = p\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

$$E(X_i^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 pq^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1) pq^{k-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} kpq^{k-1}$$

$$= pq\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} + \frac{1}{p}$$

$$= pq\frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\right)\Bigg|_{x=q} + \frac{1}{p}$$

$$= pq\frac{2}{(1-x)^3}\Bigg|_{x=q} + \frac{1}{p} = \frac{2-p}{p^2}$$

$$D(X_i) = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

故

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i) = \frac{n}{p}$$

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i) = \frac{n(1-p)}{p^2}$$