Chap 8 参数估计

统计推断的基本问题

- 参数估计 (Chap8)
  - 点估计
  - 区间估计
- 假设检验 (Chap9)

§ 8.1 参数的点估计

什么是参数估计?

例如，$X \sim N(\mu, \sigma^2)$,

若μ, σ^2未知，在抽取样本、获取样本观测值之后，

通过构造样本的函数(统计量), 给出它们的估计值或取值区间，就是参数估计的内容.

点估计 **区间估计**

参数估计的类型

点估计 —— 估计未知参数的值

区间估计—— 估计未知参数的取值范围，使得这个范围包含未知参数真值的概率为给定的值.

§8.1 点估计方法

点估计的思想方法

设总体X的分布函数的形式已知，但它含有一个或多个未知参数：$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$为总体的一个样本

构造 k 个统计量：

$$\left.\begin{array}{c} \theta_1(X_1, X_2, \cdots, X_n) \\ \theta_2(X_1, X_2, \cdots, X_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \theta_k(X_1, X_2, \cdots, X_n) \end{array}\right\} \text{随机变量}$$

当测得一组样本值$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$时，代入上述统计量，即可得到 k 个数：

$$\left.\begin{array}{l} \hat{\theta}_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \hat{\theta}_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \hat{\theta}_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{array}\right\} \text{数值}$$

称数$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_k$ 为未知参数$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ 的估计值

称对应的统计量 $\theta_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, $\theta_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$,

$\cdots$, $\theta_k(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

为未知参数 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ 的估计量

问题

如何构造统计量？

如何评价估计量的好坏？

常用的点估计方法

□ 矩法

方法： 用样本的 k 阶矩作为总体的 k 阶矩的估计量，建立含有待估计参数的方程，从而可解出待估计参数

即：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to E(X)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \to E(X^2)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^3 \to E(X^3)$$

记作：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \hat{E}(X)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \hat{E}(X^2)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^3 = \hat{E}(X^3)$$

由 $\begin{cases} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = \hat{E}(X) \\ \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 = \hat{E}(X^2) \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \hat{\mu} = \hat{E}(X) = \bar{X}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{E}(X^2) - \hat{E}^2(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 = S_n^2$$

即：以样本均值估计总体均值，

以样本的2阶中心距估计方差

例2 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$为总体的样本，求 μ, σ^2 的矩法估计量。

解 $$\hat{\mu}_{矩} = \hat{E}(X) = \bar{X}$$

$$\hat{\sigma}^2_{矩} = \hat{E}(X^2) - \hat{E}^2(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = S_n^2$$

例3 设总体 $X \sim E(\lambda), X_1, X_2, \ldots, X_n$为总体的样本，求$\lambda$的矩法估计量。

解 $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ 则 $\hat{E}(X) = \dfrac{1}{\hat{\lambda}} = \overline{X}$

故 $\hat{\lambda} = \dfrac{1}{\overline{X}}$

例4 设从某灯泡厂某天生产的一大批灯泡中随机地抽取了10只灯泡，测得其寿命为(单位：小时)：

1050， 1100， 1080， 1120， 1200

1250， 1040， 1130， 1300， 1200

试用矩法估计该厂这天生产的灯泡的平均寿命及寿命分布的标准差.

解

$$\hat{E}(X)=\overline{x}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i=1147(h)$$

$$\hat{D}(X)=\hat{\sigma}^2=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i^2-\overline{x}^2=6821(h^2)$$

$$\sqrt{\hat{D}(X)}=79.25(h)$$

例5 设总体 $X \sim U(a, b)$, a, b 未知，求 a, b 的矩法估计量.

解 由于 $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$,

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

令

$$\begin{cases} \hat{E}(X) = \dfrac{\hat{a}+\hat{b}}{2} = \bar{X} \\ \hat{E}(X^2) = \dfrac{\hat{a}^2+\hat{a}\hat{b}+\hat{b}^2}{3} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 \end{cases}$$

解得

$$\hat{a}_{矩} = \bar{X} - \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

$$\hat{b}_{矩} = \bar{X} + \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$