§9.2 正态总体的参数检验

关于μ的检验(σ^2已知)

(1.1) μ的双边检验(σ^2已知)

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，σ^2已知，需检验：

$$H_0: \mu = \mu_0 \ ; \quad H_1: \mu \neq \mu_0$$

给定显著性水平α与样本值$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$H_0: \mu = \mu_0$; $H_1: \mu \neq \mu_0$

拒绝域的推导

形式分析：

若$\mu = \mu_0$成立，则样本均值$\bar{X}$不能偏离μ_0太多

即 $\bar{X} - \mu_0$不能非常大或者非常小

$\bar{X} - \mu_0$非常大时，说明样本数据不支持原假设 $\mu = \mu_0$，而是支持被择假设 $\mu \neq \mu_0$

$\bar{X} - \mu_0$非常小时，说明样本数据不支持原假设 $\mu = \mu_0$，而是支持被择假设 $\mu \neq \mu_0$

H_0 ： $\mu = \mu_0$ ；　H_1 ： $\mu \neq \mu_0$

形式为：

$\bar{X} - \mu_0 > ?$　或　$\bar{X} - \mu_0 < ?$

显著性水平为α，　即 $\bar{X} - \mu_0$非常大或者非常小的标准为：$\bar{X} - \mu_0$ 非常大或者非常小到其发生的概率只有α（0.05或0.01）

因为统计量 $U=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$

$$P_{H_0}\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\le -Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \text{ 或 } \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\ge Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)=\alpha$$

故拒绝域 $\left\{\bar{X}\ \middle|\ \dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\le -Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \text{ 或 } \dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\ge Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}$

即 $\left|\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\ge Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ 或 $|U|\ge Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

（1.2）$\boldsymbol{\mu}$ 的右边检验(σ^2 已知)

$$H_0 : \mu = \mu_0 ; \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$H_0 : \mu = \mu_0 ; \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

拒绝域的推导

形式分析：

若$\mu = \mu_0$成立，则样本均值 $\bar{X}$ 不能大于μ_0太多

即 $\bar{X} - \mu_0$不能非常大

$\bar{X} - \mu_0$非常大时,说明样本数据不支持原假设 $\mu = \mu_0$，而是支持被择假设 $\mu > \mu_0$

注：

$\bar{X} - \mu_0$非常小时,说明样本数据相对支持原假设$\mu = \mu_0$，此时不能拒绝原假设，不属于拒绝域

$H_0: \mu = \mu_0$; $H_1: \mu > \mu_0$

形式为：

$\bar{X} - \mu_0 \geq ?$

显著性水平为α，即 $\bar{X} - \mu_0$非常大的标准为：

$\bar{X} - \mu_0$ 非常大到其发生的概率只有α

因为统计量 $U=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$

$$P_{H_0}\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\geq Z_{1-\alpha}\right)=\alpha$$

故拒绝域 $\left\{\bar{X}\;\middle|\;\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\geq Z_{1-\alpha}\right\}$

即 $\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\geq Z_{1-\alpha}$ 或 $U\geq Z_{1-\alpha}$

（1.3）μ 的左边检验(σ^2 已知)

$$H_0 : \mu = \mu_0 ; \quad H_1 : \mu < \mu_0$$

$$H_0: \mu = \mu_0; \quad H_1: \mu < \mu_0$$

拒绝域的推导

形式分析：

若$\mu = \mu_0$成立，则样本均值 $\bar{X}$ 不能小于μ_0太多

即 $\bar{X} - \mu_0$不能非常小

$\bar{X} - \mu_0$ 非常小时，说明样本数据不支持原假设 $\mu = \mu_0$，而是支持被择假设 $\mu < \mu_0$

注：

$\bar{X} - \mu_0$ 非常大时，说明样本数据相对支持原假设$\mu = \mu_0$，此时不能拒绝原假设，不属于拒绝域

$H_0: \mu = \mu_0$; $H_1: \mu < \mu_0$

形式为：

$$\bar{X} - \mu_0 \leq ?$$

显著性水平为α，即 $\bar{X} - \mu_0$非常小的标准为：
$\bar{X} - \mu_0$ 非常小到其发生的概率只有α

因为统计量 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$

$$P_{H_0}\left(\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\le Z_{\alpha}\right)=\alpha$$

或 $-Z_{1-\alpha}$

故拒绝域 $\left\{\overline{X}\ \middle|\ \dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\le -Z_{1-\alpha}\right\}$

即 $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\le -Z_{1-\alpha}$ 或 $U\le -Z_{1-\alpha}$

U 检验法 (σ^2 已知)

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其 H_0为真时的分布	拒绝域
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$	$\lvert U \rvert \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
$\mu = \mu_0$ $\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$U \geq z_{1-\alpha}$
$\mu = \mu_0$ $\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$U \leq -z_{1-\alpha}$

关于μ 的检验(σ^2 未知)

(2.1)μ 的双边检验(σ^2 未知)

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,σ^2未知,需检验:

$$H_0: \mu = \mu_0; \quad H_1: \mu \neq \mu_0$$

给定显著性水平α与样本值$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$H_0: \mu = \mu_0; \quad H_1: \mu \neq \mu_0$$

拒绝域的推导

形式分析：

若$\mu = \mu_0$成立，则样本均值$\bar{X}$不能偏离μ_0太多

即 $\bar{X} - \mu_0$不能非常大或者非常小

$\bar{X} - \mu_0$非常大时，说明样本数据不支持原假设 $\mu = \mu_0$，而是支持被择假设 $\mu \neq \mu_0$

$\bar{X} - \mu_0$非常小时，说明样本数据不支持原假设 $\mu = \mu_0$，而是支持被择假设 $\mu \neq \mu_0$

$$H_0: \mu = \mu_0; \quad H_1: \mu \neq \mu_0$$

形式为：

$$\bar{X} - \mu_0 > ? \quad 或 \quad \bar{X} - \mu_0 < ?$$

显著性水平为α，即 $\bar{X} - \mu_0$非常大或者非常小的标准为: $\bar{X} - \mu_0$ 非常大或者非常小到其发生的概率只有α（0.05或0.01）

因为统计量 $T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$ $U=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$

$$P_{H_0}\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\le -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\text{ 或 }\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\ge t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)=\alpha$$

故拒绝域

$$\left\{\bar{X}\,\middle|\,\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\le -t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\text{ 或 }\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\ge t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}$$

即 $\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|\ge t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $|T|\ge t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

（2.2）μ 的右边检验(σ^2 未知)

$$H_0 : \mu = \mu_0 ; \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \geq t_{1-\alpha}(n-1) \qquad \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \geq Z_{1-\alpha}$$

（2.3）μ 的左边检验(σ^2 未知)

$$H_0 \; : \; \mu = \mu_0 \; ; \qquad H_1 \; : \; \mu < \mu_0$$

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \le -t_{1-\alpha}(n-1) \qquad \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \le -Z_{1-\alpha}$$

T 检验法 (σ^2 未知)

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其 H_0为真时的分布	拒绝域
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$	$\lvert T \rvert \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}$
$\mu = \mu_0$ $\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$T \geq t_{1-\alpha}$
$\mu = \mu_0$ $\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$T \leq -t_{1-\alpha}$

例1 某糖厂有一台自动打包机打包，额定标准是每包质量为100kg。设包质量服从正态分布，且根据以往经验，其方差为$\sigma^2=(0.4)^2$。某天开工后，为检查打包机工作情况，随机的抽取9包，称得质量（单位：kg）如下：

99	98.5	102.5	101	98
99	102	102.1	100.5	

问 这天打包机工作是否正常(α=0. 05) ？

解 μ 的双边检验(σ^2 已知)

$$H_0: \mu = 100; \quad H_1: \mu \neq 100$$

拒绝域 $\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ 即: $\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq 1.96$

而由样本值: $\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| = \left|\dfrac{100.29-100}{0.4/\sqrt{9}}\right| = 2.175$

故拒绝$H_0: \mu = 100$

例2 某厂生产小型马达，其说明书上写着：这种小型马达在正常负载下平均消耗电流不会超过0.8 安培.

现随机抽取16台马达试验，求得平均消耗电流为0.92安培，消耗电流的标准差为0.32安培.

假设马达所消耗的电流服从正态分布，取显著性水平为$\alpha = 0.05$，问根据这个样本，能否否定厂方的断言？

解 根据题意待检假设可设为

$H_0: \mu \le 0.8$；　　$H_1: \mu > 0.8$

σ未知, 拒绝域为:

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} > t_{1-\alpha}(n-1)$$

查表得 $t_{1\text{-}0.05}(16\text{-}1) = 1.753$, 故拒绝域为

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} > 1.753$$

由 $\bar{x} = 0.92 \quad \mu = 0.8$ 　　得 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} = 1.452$

$s = 0.32 \quad n = 16$

故接受原假设, 得到结论：不能否定厂方断言.

$H_0: \mu \geq 0.8$； $H_1: \mu < 0.8$

σ未知, 拒绝域为:

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < -t_{1-\alpha}(n-1)$$

查表得 $-t_{1-0.05}(16-1) = -1.753$, 故拒绝域为

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < -1.753$$

由 $\bar{x} = 0.92 \quad \mu = 0.8$ 得 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} = 1.452$

$s = 0.32 \quad n = 16$

故接受原假设，得到结论：不能相信厂方断言.

由例2可见：对问题的提法不同(把哪个假设作为原假设)，统计检验的结果也会不同.

由于假设检验是控制犯第一类错误的概率，使得拒绝原假设 H_0 的决策变得比较慎重，也就是 H_0 得到特别的保护. 因而，通常把有把握的，经验的结论作为原假设，或者尽量使后果严重的错误成为第一类错误.

上述两种解法的立场不同，因此得到不同的结论.第一种假设是不轻易否定厂方的结论；第二种假设是不轻易相信厂方的结论.