§9.2 正态总体的参数检验

- 关于σ^2的检验（μ 未知）

(1)σ^2的双边检验（μ 未知）

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$， μ 未知，需检验：

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2; \quad H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

给定显著性水平α与样本值$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$构造统计量

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2; \quad H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

拒绝域的推导

形式：

若$\sigma^2=\sigma_0^2$成立，则样本均值 S^2不能偏离σ_0^2太多，即 $\dfrac{S^2}{\sigma_0^2}$ 不能非常大或者非常小

$\dfrac{S^2}{\sigma_0^2}$非常大时，说明样本数据不支持原假设 $\sigma^2=\sigma_0^2$，而是支持被择假设 $\sigma^2\neq\sigma_0^2$

$\frac{S^2}{\sigma_0^2}$ 非常小时，说明样本数据不支持原假设

$\sigma^2=\sigma_0^2$， 而是支持被择假设 $\sigma^2\neq\sigma_0^2$

H_0 ： $\sigma^2=\sigma_0^2$ ； H_1 ： $\sigma^2\neq\sigma_0^2$

形式为：

$\frac{S^2}{\sigma_0^2}>?$ 或 $\frac{S^2}{\sigma_0^2}<?$

显著性水平为 α ，即 $\frac{S^2}{\sigma_0^2}$ 非常大或者非常小

的标准为： $\frac{S^2}{\sigma_0^2}$ 非常大或者非常小到其发生的

概率只有 α（0.05或0.01）

因为统计量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$

$$P_{H_0}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\le\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\ \text{或}\ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\ge\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}$$

$$=\alpha$$

故拒绝域

$$\left\{S^2\ \middle|\ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\le\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\ \text{或}\ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\ge\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}$$

(1)σ^2的右边检验（μ 未知）

$$H_0 ： \sigma^2 = \sigma_0^2 ; \quad H_1 ： \sigma^2 > \sigma_0^2$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \geq \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$$

(1)σ^2的左边检验（μ 未知）

$$H_0 \ : \ \sigma^2 = \sigma_0^2 \ ; \qquad H_1 \ : \ \sigma^2 < \sigma_0^2$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \le \chi^2_{\alpha}(n-1)$$

σ^2 的检验 (μ 未知)

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0 为真时的分布	拒绝域
$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$ (μ 未知)	$\chi^2\le\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\chi^2\ge\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
$\sigma^2=\sigma_0^2$ $\sigma^2\le\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$		$\chi^2\ge\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
$\sigma^2=\sigma_0^2$ $\sigma^2\ge\sigma_0^2$	$\sigma^2<\sigma_0^2$		$\chi^2\le\chi^2_{\alpha}(n-1)$

关于σ^2的检验（μ 已知）

(1)σ^2的双边检验（μ 已知）

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$， μ已知，需检验：

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2; \quad H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

给定显著性水平α与样本值$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

构造统计量

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2 \sim \chi^2(n)$$

故拒绝域

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2 \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n) \text{ 或 } \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2 \ge \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$$

(1)σ^2的右边检验（μ已知）

$$H_0: \sigma^2=\sigma_0^2; \quad H_1: \sigma^2>\sigma_0^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2 \geq \chi^2_{1-\alpha}(n)$$

(1)σ^2的左边检验（μ已知）

$$H_0: \ \sigma^2 = \sigma_0^2; \quad H_1: \ \sigma^2 < \sigma_0^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma_0}\right)^2 \le \chi^2_{\alpha}(n)$$

σ^2 的检验(μ 已知)

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量及其在 H_0为真时的分布	拒绝域
$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2 \sim \chi^2(n)$ (μ 已知)	$\chi^2\leq\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$ 或 $\chi^2\geq\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$
$\sigma^2=\sigma_0^2$ $\sigma^2\leq\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$		$\chi^2\geq\chi^2_{1-\alpha}(n)$
$\sigma^2=\sigma_0^2$ $\sigma^2\geq\sigma_0^2$	$\sigma^2<\sigma_0^2$		$\chi^2\leq\chi^2_{\alpha}(n)$

例1：某厂生产螺钉，生产一直比较稳定，长期以来，螺钉的直径服从方差为σ^2=0.0002(cm^2)的正态分布。今从产品中随机抽取10只进行测量，得螺钉直径的数据(单位：cm)如下：

1.19	1.21	1.21	1.18	1.17
1.20	1.20	1.17	1.19	1.18

问：(α =0. 05)

(1)是否可以认为螺钉直径的方差为0.0002

(2)是否可以认为螺钉直径的方差大于0.0002

(1) μ 未知

$$H_0: \sigma^2 = 0.0002; \quad H_1: \sigma^2 \neq 0.0002$$

拒绝域: $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

查表知: $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{\frac{0.05}{2}}(10-1) = 2.7$

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{1-\frac{0.05}{2}}(10-1) = 19.0$$

故拒绝域: $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \in (0,\ 2.7) \cup (19.0,\ \infty)$

而由观测值知: $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 0.00022$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = 10$$

故接受

(2) μ 未知

$$H_0:\ \sigma^2=0.0002;\quad H_1:\ \sigma^2>0.0002$$

拒绝域: $$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\ge \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$$

查表知: $\chi^2_{1-\alpha}(n-1)=\chi^2_{1-0.05}(10-1)=16.9$

故拒绝域: $$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\in(16.9,\ \infty)$$

而由观测值知: $$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=0.00022$$

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=10$$

故接受

例2某汽车配件厂在新工艺下对加工好的25个活塞的直径进行测量,得样本方差$s^2=0.00066$.已知老工艺生产的活塞直径的方差为0.00040. 问改革后活塞直径的方差是否大于改革前?

解 设测量值 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\sigma^2 = 0.00040$

需考察改革后活塞直径的方差是否大于改革前的方差? 故待检验假设可设为:

$$H_0: \sigma^2 = 0.00040; \quad H_1: \sigma^2 > 0.00040.$$

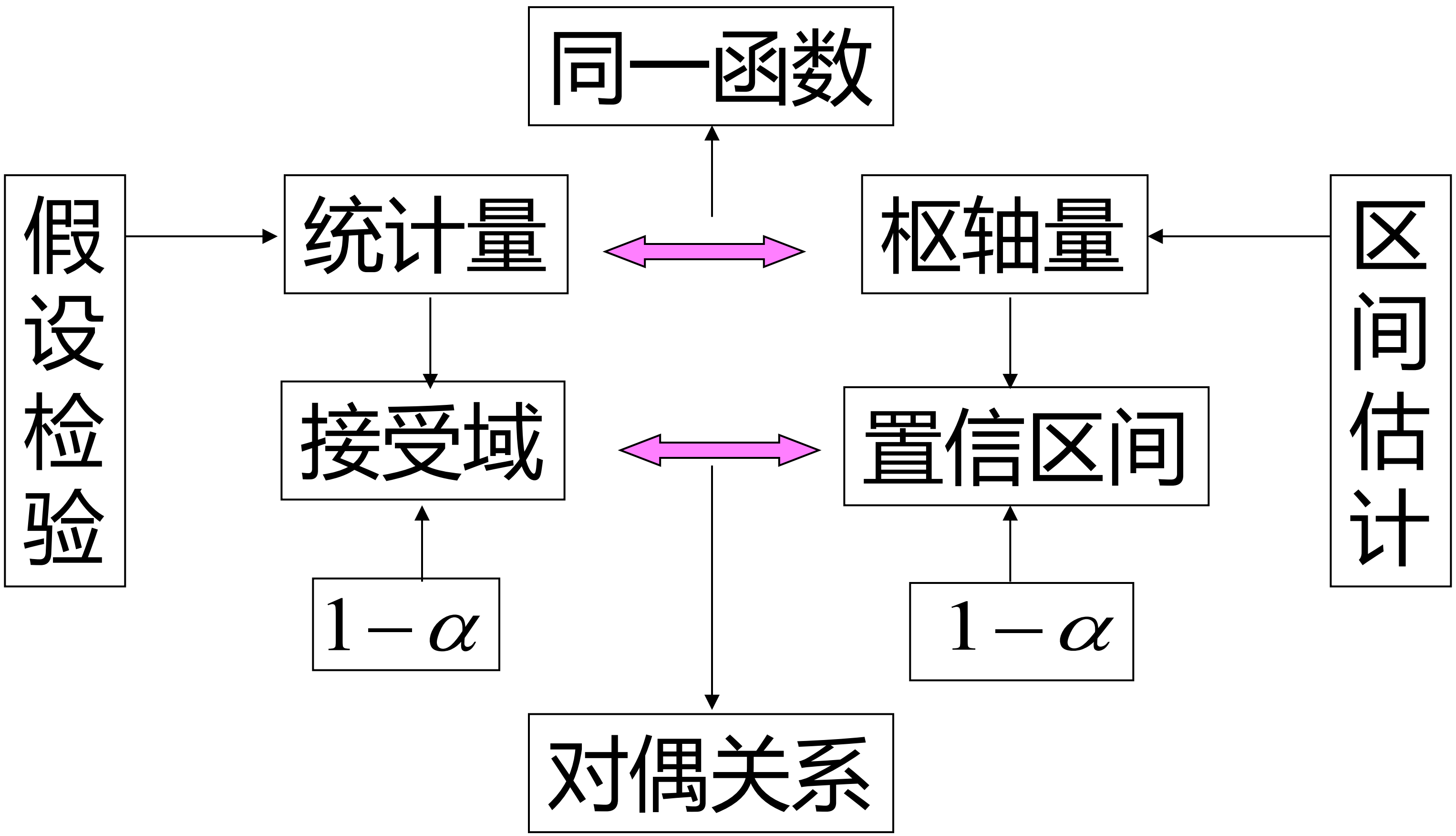
取统计量 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$

拒绝域： $\chi^2 \geq \chi_{1-\alpha}{}^2(n-1) = \chi^2_{1-0.05}(24) = 36.415$

现 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{(25-1)\times 0.00066}{0.00040} = 39.6 > 36.415$

落在拒绝域内, 故拒绝H_0. 即改革后的方差显著大于改革前的方差.

假设检验与区间估计的联系



例5 新设计的某种化学天平，其测量的误差服从正态分布，现要求 99.7% 的测量误差不超过 0.1mg, 即要求 $3\sigma \le 0.1$。现拿它与标准天平相比，得10个误差数据，其样本方差s^2 =0.0009. 试问在 $\alpha = 0.05$的水平上能否认为满足设计要求?

现要求 99.7% 的测量误差不超过 0.1mg, 即要求 $3\sigma \le 0.1$。

注： 99.7% 的测量误差不超过 0.1mg,

$$\Longleftrightarrow P\{|X-\mu|<0.1\}=99.7\%$$

$$\Longleftrightarrow P\{|X-\mu|>0.1\}=0.3\%$$

$$\Longleftrightarrow P\left\{\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right|>\frac{0.1}{\sigma}\right\}=0.3\%$$

$$\Longleftrightarrow P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma}<-\frac{0.1}{\sigma}\text{或}\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{0.1}{\sigma}\right\}=0.3\%$$

$$\Longleftrightarrow P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma}<-\frac{0.1}{\sigma}\right\}=0.15\%=0.0015$$

$$\Longleftrightarrow -\frac{0.1}{\sigma}=z_{0.0015}=-2.97\approx -3$$

$$\Longleftrightarrow 3\sigma \le 0.1$$

解一 $H_0: \sigma \le 1/30$； $H_1: \sigma \ge 1/30$

μ 未知, 故选检验统计量 $\chi^2 = \dfrac{9S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(9)$

拒绝域: $\chi^2 = \dfrac{9S^2}{1/900} > \chi^2_{1-0.05}(9) = 16.919$

现 $\chi^2 = \dfrac{9S^2}{1/900} = 7.29 < 16.919$ 落在拒绝域外

故接受原假设, 即认为满足设计要求.

解二 σ^2的单侧置信区间为

$$\left(0,\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right)=\left(0,\ \frac{0.0081}{3.325}\right)=(0,\ 0.0024)$$

H_0中，$\sigma_0^2=\dfrac{1}{900}=0.0011<0.0024$ 则H_0成立

从而接受原假设, 即认为满足设计要求.

样本容量的选取

虽然当样本容量 n 固定时，我们不能同时控制犯两类错误的概率，但可以适当选取 n 的值，使犯取伪错误的概率 β 控制在预先给定的限度内.