第二节：随机过程的概率分布

设 $\{X(t), t \in T\}$ 是一随机过程,

对于参数集T中的任意n个元素：t_1 、t_2 、 …… t_n，所对应的n个随机变量

$$X(t_1) = X(e, t_1)\,,\quad X(t_2) = X(e, t_2)\,,\quad \cdots \quad X(t_n) = X(e, t_n)$$

的联合分布

$$F(x_1, \cdots, x_n; t_1, \cdots, t_n) = P\{X(t_1) \le x_1, \cdots, X(t_n) \le x_n\}$$

称为随机过程$X(t)$的n维分布函数

如:

n=1时　一维分布函数

$$F(x_1;t_1) = P\{X(t_1) \le x_1\}$$

n=2时　二维分布函数

$$F(x_1,x_2;t_1,t_2) = P\{X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2\}$$

n维密度函数

$$f(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)$$

n维联合分布律

$$P(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)$$

随机过程的任意n维分布函数或概率密度(联合分布律)，其中n=1,2…，可以完全地确定了随机过程的统计特征.

特别地，如果对于任何正整数n，随机过程的任意n个状态都是相互独立的，则称此过程为独立过程.

此时，

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=\prod_{i=1}^{n}F(x_i;t_i)$$

例1 在一条自动生产线上检验产品质量，每次检验一个,区分正品或次品。那么，整个检验的样本空间S={e}={e_1,e_2}，e_1=正品，e_2=次品,

为了描述检验的全过程,引入二元函数

$$X(e,t)=\begin{cases}0, \text{第}t\text{次查出正品}, \\ t, \text{第}t\text{次查出次品}.\end{cases} \qquad t \in T \equiv \{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$$

则二元函数 $X(e,t)$ 就是一个随机过程.

设各次检验相互独立地进行,每次检验的次品率为P(0<p<1).

求随机过程$X(t)$在t_1=1和t_2=2时的二维分布函数.

解 $$X(t)=X(e,t)=\begin{cases}0, & \text{第}t\text{次查出正品}\\ t, & \text{第}t\text{次查出次品}\end{cases}$$

在$t_1=1$时,过程的状态$X(1)$ 的分布律为:

$$X(1)=X(e,1)=\begin{cases}0, & \text{第1次查出正品}\\ 1, & \text{第1次查出次品}\end{cases}$$

$X(1)$	0	1
P	1-p	p

一维分布函数为

$$F(x;1)=P\{X(1)\le x\}=\begin{cases}0, x<0\\ 1-p, 0\le x<1\\ 1, x\ge 1\end{cases}$$

在t_2=2时,过程的状态$X(2)$的分布律为:

$$X(2)=X(e,2)=\begin{cases}0, & \text{第2次查出正品}\\ 2, & \text{第2次查出次品}\end{cases}$$

$X(2)$	0	2
P	1-p	p

一维分布函数为

$$F(x;2)=P\{X(2)\le x\}=\begin{cases}0, x<0\\ 1-p, 0\le x<2\\ 1, x\ge 2\end{cases}$$

即：一维分布函数分别为

$$F(x;1) = P\{X(1) \leq x\} = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1 - p, 0 \leq x < 1 \\ 1, x \geq 1 \end{cases}$$

$$F(x;2) = P\{X(2) \leq x\} = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1 - p, 0 \leq x < 2 \\ 1, x \geq 2 \end{cases}$$

由$X(1)$和$X(2)$相互独立，知，二维分布函数

$$F(x_1, x_2; 1,2) = F(x_1; 1) \cdot F(x_2; 2)$$

$$= \begin{cases} 0, x_1 < 0 \text{或} x_2 < 0 \\ (1-p)^2, 0 \le x_1 < 1, 0 \le x_2 < 2 \\ 1-p, \begin{cases} 0 \le x_1 < 1 \\ x_2 \ge 2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x_1 \ge 1 \\ 0 \le x_2 < 2 \end{cases} \\ 1, x_1 \ge 1, x_2 \ge 2 \end{cases}$$

例2　设随机过程 $Z(t)=(X^2+Y^2)t, t>0$ 式中X与Y是相互独立的标准正态随机变量.试求此过程的一维概率密度.

解　$X\sim N(0,1), Y\sim N(0,1)$　X与Y是相互独立

故X与Y的联合概率密度

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{x^2}{2}\}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{y^2}{2}\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\exp\{-\frac{x^2+y^2}{2}\}\qquad -\infty<x,y<+\infty$$

当z>0时,

$$F(z;t)=P\{Z(t)\le z\}=P\{(X^2+Y^2)t\le z\}$$

$$=P\{X^2+Y^2\le\frac{z}{t}\} \quad = \iint\limits_{x^2+y^2\le\frac{z}{t}}\frac{1}{2\pi}\exp\{-\frac{x^2+y^2}{2}\}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{z}{t}}}\frac{1}{2\pi}\exp\{-\frac{r^2}{2}\}rdrd\theta$$

$$=[-\exp\{-\frac{r^2}{2}\}]\Big|_0^{\sqrt{\frac{z}{t}}}$$

$$=1-\exp\{-\frac{z}{2t}\}$$

当z≤0时,

$$F(z;t) = P\{Z(t) \le z\} = P\{(X^2 + Y^2)t \le z\}$$

$$= P\{X^2 + Y^2 \le \frac{z}{t}\} = 0$$

故 $$F(z;t) = \begin{cases} 1 - \exp\{-\frac{z}{2t}\}, z > 0 \\ 0, z \le 0 \end{cases}$$

于是, Z(t)的一维概率密度为

$$f(z;t) = \frac{d}{dz}F(z;t) = \begin{cases} \frac{1}{2t}\exp\{-\frac{z}{2t}\}, z > 0 \\ 0, z \le 0 \end{cases}$$

两个随机过程有限维联合分布及独立性:

设 $\{X(t), t \in T_1\}$ 和$\{Y(t), t \in T_2\}$是两个随机过程

由$\{X(t), t \in T_1\}$的任意m个状态: $\{X(t_1)\}, \ldots\ldots \{X(t_m)\}$
和$\{Y(t), t \in T_2\}$的任意n个状态:$\{Y(t'_1)\}, \ldots\ldots \{Y(t'_n)\}$

组成m+n维随机向量.其分布函数

$$F_{XY}(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n; t_1, \cdots, t_m, t'_1, \cdots, t'_n)$$

称为随机过程X(t)和Y(t)的m+n维联合分布函数.

如果对于任何正整数m和n,对于T_1中的任意数组以及T_2中的任意数组,关系式

$$F_{XY}(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n;t_1,\cdots,t_m,t_1',\cdots,t_n')$$

$$=F_X(x_1,\cdots,x_m;t_1,\cdots,t_m)\cdot F_Y(y_1,\cdots,y_n;t_1',\cdots,t_n')$$

都成立,则称两个随机过程相互独立.