例1 设随机相位正弦波

$$X(t) = a\cos(\omega t + \Theta) \quad -\infty < t < +\infty$$

式中 a,ω 是常数, Θ 是在区间 $(0,2\pi)$

上服从均匀分布的随机变量.

求：X(t)的均值函数、方差函数、自相关函数和自协方差函数.

解: 依题意 Θ 的概率密度为

$$f(\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}, 0 < \theta < 2\pi \\ 0, \text{其它} \end{cases}$$

(1)均值函数

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = E[a\cos(\omega t + \Theta)]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} a\cos(\omega t + \theta) \cdot f(\theta) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} a\cos(\omega t + \theta) \cdot \frac{1}{2\pi} d\theta = 0$$

(2)自相关函数

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1) \cdot X(t_2)]$$

$$= E[a\cos(\omega t_1 + \Theta) \cdot a\cos(\omega t_2 + \Theta)]$$

$$= \int_0^{2\pi} a\cos(\omega t_1 + \theta) \cdot a\cos(\omega t_2 + \theta) \cdot \frac{1}{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\omega t_2 - \omega t_1) + \cos(\omega t_2 + \theta + \omega t_1 + \theta)}{2} d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2} \cos\omega(t_2 - t_1)$$

(3)自协方差函数

$$C_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)-\mu_X(t_1)\cdot\mu_X(t_2)$$

$$=\frac{a^2}{2}\cos\omega(t_2-t_1)$$

(4)方差函数

$$\sigma_X^2(t)=C_X(t,t)=\frac{a^2}{2}$$

例2：设随机过程 $Z(t)=X+Yt \quad -\infty<t<+\infty$

式中X 服从 $N(a,\sigma_1^2)$ Y服从 $N(b,\sigma_2^2)$

且X与Y的相关系数 $\rho_{XY}=\rho$

求: Z(t)的自相关函数.

解 Z(t)的自相关函数

$$
\begin{aligned}
R_Z(t_1,t_2) &= E[Z(t_1)\cdot Z(t_2)] \\
&= E[(X+Yt_1)\cdot(X+Yt_2)] \\
&= E[X^2+t_1t_2Y^2+(t_1+t_2)XY] \\
&= EX^2+t_1t_2EY^2+(t_1+t_2)E(XY)
\end{aligned}
$$

因为 $X \sim N(a, \sigma_1^2)$ $Y \sim N(b, \sigma_2^2)$

所以 $EX = a$ $DX = \sigma_1^2$

$$EX^2 = DX + (EX)^2 = \sigma_1^2 + a^2$$

$$EY = b \qquad DY = \sigma_2^2$$

$$EY^2 = DY + (EY)^2 = \sigma_2^2 + b^2$$

由 $\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - EX \cdot EY$

$$\rho = \rho_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY}}$$

得 $E(XY) = \operatorname{cov}(X, Y) + EX \cdot EY$

$$= \rho\sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY} + EX \cdot EY$$

$$= \rho\sigma_1\sigma_2 + ab$$

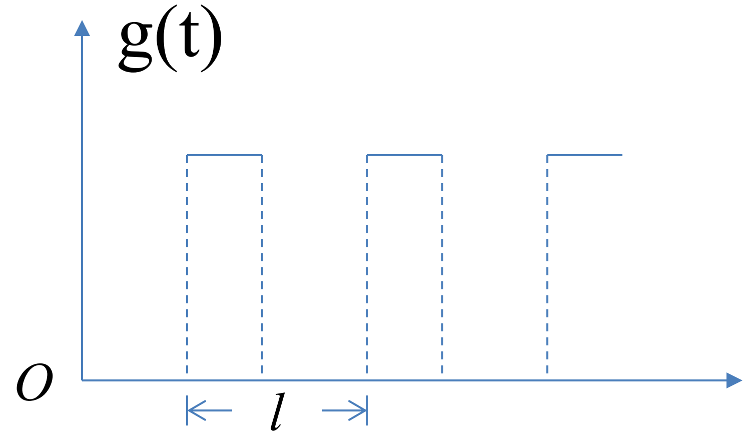
于是 $$R_Z(t_1,t_2)=(a^2+\sigma_1^2)+t_1t_2(b^2+\sigma_2^2)$$
$$+(t_1+t_2)(\rho\sigma_1\sigma_2+ab)$$

例3　设随机振幅矩形波$Y(t) = Xg(t),\ t > 0$

式中X服从参数p=0.5的(0-1)分布,

g(t)是所示的周期为 l 的矩形波（如图）

X	0	1
P	0.5	0.5



求Y(t)的均值、方差.

解　随机变量X的分布律为

X	0	1
P	0.5	0.5

故有 $EX=\frac{1}{2}$　$DX=\frac{1}{4}$

$$\mu_Y(t)=E[X(g(t)]=g(t)EX=\frac{1}{2}g(t)$$

$$\sigma_Y^2(t)=D[Xg(t)]=g^2(t)DX=\frac{1}{4}g^2(t)$$

对于两个随机过程 $\{X(t),t\in T_1\}$ 和 $\{Y(t),t\in T_2\}$

任选 $t_1\in T_1,t_2\in T_2$

对应有过程 X(t)在 t_1 的状态$X(t_1)$

和过程Y(t)在 t_2 的状态 $Y(t_2)$

$X(t_1)$ 和$Y(t_2)$的二阶原点混合矩

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E[X(t_1)Y(t_2)]$$

称为随机过程X(t)和 Y(t)的互相关函数;

$X(t_1)$ 和 $Y(t_2)$ 的二阶中心混合矩

$$C_{XY}(t_1,t_2)=E\{[X(t_1)-\mu_X(t_1)][Y(t_2)-\mu_Y(t_2)]\}$$

称为随机过程 X(t)和 Y(t)的互协方差函数;

且 $C_{XY}(t_1,t_2)=R_{XY}(t_1,t_2)-\mu_X(t_1)\mu_Y(t_2)$

定义:

如果对任意 $t_1\in T_1, t_2\in T_2$ 都有 $C_{XY}(t_1,t_2)=0$

即 $E[X(t_1)Y(t_2)]=E[X(t_1)]\cdot E[Y(t_2)]$

则称随机过程 X(t)和 Y(t)是不相关的.

显然,相互独立的两个随机过程必不相关.

例4 设某接收机收到周期信号输入电压S(t)和噪声电压N(t)且设[N(t)]=0, S(t)与N(t)互不相关。试导出输出电压V(t)=S(t)+N(t)的均值、自相关函数与输入电压的数字特征的关系.

解 V(t)的均值函数

$$\mu_V(t) = E[V(t)]$$

$$= E[S(t) + N(t)]$$

$$= E[S(t)] + E[N(t)]$$

$$= \mu_S(t)$$

V(t)的自相关函数

$$R_V(t_1,t_2) = E[V(t_1)\cdot V(t_2)]$$

$$= E\{[S(t_1)+N(t_1)]\cdot[S(t_2)+N(t_2)]\}$$

$$= E[S(t_1)\cdot S(t_2)] + E[S(t_1)N(t_2)]$$

$$+ E[S(t_2)N(t_1)] + E[N(t_1)N(t_2)]$$

由于S(t)与N(t)互不相关

有 $E[S(t_1)N(t_2)] = E[S(t_1)]\cdot E[N(t_2)] = 0$

$$E[S(t_2)N(t_1)] = E[S(t_2)]\cdot E[N(t_1)] = 0$$

于是得到

$$R_V(t_1,t_2) = R_S(t_1,t_2) + R_N(t_1,t_2)$$

例5　给定随机过程X(t)，和常数a，设

$$Y(t)=X(t+a)-X(t)$$

试以X(t)的相关函数表示Y(t)的自相关函数。

解　Y(t)的自相关函数

$$R_Y(t_1,t_2)=E[Y(t_1)\cdot Y(t_2)]$$

$$=E[(X(t_1+a)-X(t_1))\cdot(X(t_2+a)-X(t_2))]$$

$$=E[X(t_1+a)\cdot X(t_2+a)]-E[X(t_1+a)\cdot X(t_2)]$$

$$-E[X(t_1)\cdot X(t_2+a)]+E[X(t_1)\cdot X(t_2)]$$

$$=R_X(t_1+a,t_2+a)-R_X(t_1+a,t_2)$$

$$-R_X(t_1,t_2+a)+R_X(t_1,t_2)$$