第十二章 平稳过程

平稳过程是一类特殊的随机过程,它的应用极为广泛.

第一节 严平稳过程

一. 定义:

随机过程 $\{X(t), t \in T\}$,

如果对任意 n 维分布函数，及任意实数ε，满足:

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n)$$

$$= F(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1 + \varepsilon, t_2 + \varepsilon, \cdots, t_n + \varepsilon) \quad n = 1, 2, \cdots$$

则称X(t)为严平稳过程，或称狭义平稳过程。

取 $\varepsilon = -t_1$, 则:

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n)$$

$$= F(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1 + \varepsilon, t_2 + \varepsilon, \cdots, t_n + \varepsilon)$$

$$= F(x_1, x_2, \cdots, x_n; 0, t_2 - t_1, \cdots, t_n - t_1)$$

即严平稳过程的有限维概率分布与时间起点t_1无关，只时间差t_2-t_1、…… t_n-t_1有关。

二. 严平稳过程的一维、二维分布函数的性质

一维分布函数

$$F_1(x_1;t_1) = F_1(x_1;t_1+\varepsilon) \quad 取 \ \varepsilon = -t_1,$$

$$= F_1(x_1;0)$$

$$= F_1(x_1)$$

上式表明:严平稳过程的一维分布函数 $F_1(x_1, t_1)$不依赖于参数 t_1。

二维分布函数

$$F_2(x_1,x_2;t_1,t_2)=F_2(x_1,x_2;t_1+\varepsilon,t_2+\varepsilon)$$ 取 $\varepsilon=-t_1,$

$$=F_2(x_1,x_2;0,t_2-t_1)$$ 记 $t_2-t_1=\tau$

$$=F_2(x_1,x_2;0,\tau)$$

$$=F_2(x_1,x_2;\tau)$$

即：二维分布函数 $F_2(\mathrm{x}_1,\ \mathrm{x}_2;\ t_1,\ t_2\ )$ 仅依赖于参数间距 $\tau=t_2-t_1$, 而与 t_2 , t_1 本身无关.

三.严平稳过程的等价条件

(1)对离散状态随机过程：

$$P\{X(t_1)=x_1, X(t_2)=x_2, \cdots, X(t_n)=x_n\}$$
$$=P\{X(t_1+\varepsilon)=x_1, X(t_2+\varepsilon)=x_2, \cdots, X(t_n+\varepsilon)=x_n\}$$

(2)对连续状态随机过程:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n)$$
$$=f(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1+\varepsilon, t_2+\varepsilon, \cdots, t_n+\varepsilon)$$

四.严平稳过程的数字特征的性质

以连续状态严平稳过程$\{X(t), t \in T\}$为例

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x,t)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x)\,dx$$

$$= \mu_X \quad \text{(常数);}$$

$$E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_1(x,t)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_1(x)\,dx$$

$$= \Psi_X^2 \quad \text{(常数);}$$

$$D[X(t)] = E[X^2(t)] - (E[X(t)])^2$$

$$= \Psi_X^2 - \mu_X^2$$

$$= \sigma_X^2 \quad (\text{常数});$$

即：由一维分布函数决定的三个数字特征均为常数，与参数 t无关;

$$E[X(t)X(t+\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, x_2; t, t+\tau) dx_1 dx_2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2$$

$$= R_X(\tau)$$

(仅依赖于$\tau = t_2 - t_1$, 而不依赖于 t);

$$E\{[X(t)-EX(t)][X(t+\tau)-EX(t+\tau)]\}$$

$$=E[X(t)X(t+\tau)]-E[X(t)]E[X(t+\tau)]$$

$$=R_X(\tau)-\mu_X^2$$

$$=C_X(\tau)$$ (仅依赖于$\tau = t_2$-t_1, 而不依赖于 t);

即：由二维分布函数决定的两个数字特征只是时间差$\tau = t_2$-t_1的函数，与时间起点 t_1无关;

综合上述，得到

定理一　设 $\{X(t), t \in T\}$ 是严平稳过程，如果过程的二阶矩存在，那么

(1) $E[X(t)] = \mu_X \quad E[X^2(t)] = \Psi_X^2 \quad D[X(t)] = \sigma_X^2$

均为常数,与参数 t无关;

(2) $E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau)$

$$E\{[X(t) - EX(t)][X(t+\tau) - EX(t+\tau)]\} = C_X(\tau)$$

仅依赖于参数间距 τ ,而不依赖于t .

称为数字特征的平稳性.

例1 (Bernoulli序列) 独立重复地进行某项试验,
每次试验成功的概率为 $p(0<p<1)$,
失败的概率为1-p .
以表示X_n第n次试验成功的次数,

试验证 $\{X_n, n=1,2,3,\cdots\}$ 是严平稳过程.

解: 令 $\{X_n=0\}$ =第n次试验失败

$\{X_n=1\}=$ 第n次试验成功

则 $P\{X_n=k\}=p^k(1-p)^{1-k} \qquad k=0,1.$

且 $\{X_n, n=1,2,\cdots\}$ 是独立随机序列.

任取m个正整数: $i_1, i_2, \cdots, i_m,$

m维分布律

$$P\{X_{i_1} = k_1, X_{i_2} = k_2, \cdots, X_{i_m} = k_m\}$$

$$= \prod_{r=1}^{m} P\{X_{i_r} = k_r\}$$

$$= \prod_{r=1}^{m} p^{k_r}(1-p)^{1-k_r} \qquad k_r = 0,1.$$

对任意正整数 l 有

$$P\{X_{i_1+l}=k_1, X_{i_2+l}=k_2, \cdots, X_{i_m+l}=k_m\}$$

$$=\prod_{r=1}^{m} P\{X_{i_r+l}=k_r\}$$

$$=\prod_{r=1}^{m} p^{k_r}(1-p)^{1-k_r}$$

$$=P\{X_{i_1}=k_1, X_{i_2}=k_2, \cdots, X_{i_m}=k_m\}$$

故BernmulLi序列$\{X_n, n=1,2\ldots\ldots\}$是严平稳过程.

例2　设X与Y是相互独立的标准正态随机变量,

$$Z(t)=(X^2+Y^2)t, t>0$$

试验证随机过程Z(t)不是严平稳过程,
Z(t)的数字特征也不具有平稳性.

解　首先求Z(t)的一维分布函数

$$X\sim N(0,1) \quad Y\sim N(0,1)$$

X与Y独立

故X与Y的联合概率密度

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \qquad -\infty<x,y<+\infty$$

$Z(t)=(X^2+Y^2)t, t>0$ 的分布函数为

$$F(z;t)=P\{Z(t)\le z\}$$

$$=P\{(X^2+Y^2)t\le z\}$$

$$=P\{X^2+Y^2\le \frac{z}{t}\}$$

若Z(t)≤0,则 $F(z;t)=0$

若Z(t)>0,则 $F(z;t)=\iint\limits_{x^2+y^2\le\frac{z}{t}} f(x,y)dxdy$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le\frac{z}{t}} \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{z}{t}}}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}rdrd\theta$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{2\pi}(-e^{-\frac{r^2}{2}})\Big|_0^{\sqrt{\frac{z}{t}}}$$

$$=1-e^{-\frac{z}{2t}}$$

于是 $F(z;t)=\begin{cases}1-e^{-\frac{z}{2t}}, z>0\\ 0, z\le 0\end{cases}$ 依赖于参数t

故对任意实数ε, $F(z;t)\ne F(z;t+\varepsilon)$

Z(t)不是严平稳过程

由Z(t)的一维分布函数可知其概率密度

$$f(z;t)=\begin{cases}\frac{1}{2t}e^{-\frac{z}{2t}}, z>0\\0, z\le 0\end{cases}$$

服从参数 $\lambda=\frac{1}{2t}$ 的指数分布,

$$E[Z(t)]=\frac{1}{\lambda}=2t$$ 依赖于t

即Z(t)的均值函数不满足平稳性.