第二节 广义平稳过程

一、广义平稳过程的定义

定义2 设随机过程X(t),对于任意 $t \in T$,满足:

(1) $E[X^2(t)]$存在且有限;

(2) $E[X(t)] = \mu_X$ 是常数;

(3) $E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau)$ 仅依赖于τ ,而与 t无关,

则称X(t)为广义平稳过程,或称宽平稳过程,

简称平稳过程.

参数集T为整数集或可列集的平稳过程
又称为平稳序列,或称平稳时间序列.

二、广义平稳过程的数字特征的性质

设 $\{X(t),t\in T\}$ 是平稳过程,则

(1) $E[X(t)]=\mu_X$ 是常数;

(2) $\Psi_X^2=E[X^2(t)]$

$$=E[X(t)X(t+0)]$$

$=R_X(0)$ 是常数;

(3) $D[X(t)]=EX^2(t)-[EX(t)]^2$

$$=\Psi_X^2-\mu_X^2$$

$=\sigma_X^2$ 是常数;

(4) $E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau)$ 仅依赖于τ,而与t无关;

(5) $C_X(t,t+\tau) = \mathrm{cov}(X(t),X(t+\tau))$

$$= E[X(t)X(t+\tau)] - E[X(t)]E[X(t+\tau)]$$

$$= R_X(\tau) - \mu_X^2$$

$$= C_X(\tau)$$ (仅依赖于 τ，而与t无关)

三、平稳过程的例子

例1 随机相位正弦波 $X(t)=a\cos(\omega t+\Theta)$,式中 a和 ω是常数,Θ是(0,2π)上服从均匀分布的随机变量. 验证X(t)是平稳过程.

验证 (1) $E[X(t)]=E[a\cos(\omega t+\Theta)]$

$$=\int_0^{2\pi} a\cos(\omega t+\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta$$

$=0$ 是常数;

(2) $E[X(t)X(t+\tau)]$

$$=E[a\cos(\omega t+\Theta)\cdot a\cos(\omega(t+\tau)+\Theta)]$$

$=\dfrac{a^2}{2}\cos\omega\tau$ 仅依赖于τ

(3) $E[X^2(t)] = \frac{a^2}{2}\cos\omega\tau\,|_{\tau=0}$

$$= \frac{a^2}{2}$$ 是常数,

所以, $X(t) = a\cos(\omega t + \Theta)$ 是平稳过程.

例2 随机振幅正弦波 $Z(t) = X\cos 2\pi t + Y\sin 2\pi t$

其中X和 Y都是随机变量,且 $EX = EY = 0,$

$DX = DY = 1$, $E(XY) = 0.$ 验证Z(t)是平稳过程.

验证 由已给条件,知 $EX^2 = EY^2 = 1$

(1) $E[Z(t)] = E[X\cos 2\pi t + Y\sin 2\pi t]$

$$= \cos 2\pi t \cdot EX + \sin 2\pi t \cdot EY$$

$$= 0$$

(2)

$$E[Z(t)Z(t+\tau)]$$

$$= E[(X\cos 2\pi t + Y\sin 2\pi t)\cdot(X\cos 2\pi(t+\tau) + Y\sin 2\pi(t+\tau))]$$

$$= \cos 2\pi t \cos 2\pi(t+\tau) + \sin 2\pi t \sin 2\pi(t+\tau)$$

$$= \cos 2\pi\tau$$

(3) $E[Z^2(t)] = 1$

所以Z(t)是平稳过程.

例3(白噪声序列) 互不相关的随机变量序列

$$\{X_n, n=0,\pm1,\pm2,\cdots\},\ EX_n=0,\ DX_n=\sigma^2\neq 0$$

是一个平稳序列.

验证

(1) $EX_n=0$,

取τ为任意非零整数,

由X_n与$X_{n+\tau}$互不相关,则有

(2) $E[X_nX_{n+\tau}]=E(X_n)\cdot E(X_{n+\tau})=0$

(3) $EX_n^2=DX_n+(EX_n)^2=\sigma^2$

所以, $\{X_n, n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 是一个平稳序列.

例4通讯系统中的加密序列。设

$\{\xi_0, \eta_0, \xi_1, \eta_1, \cdots, \xi_n, \eta_n, \cdots\}$是相互独立的随机变量序列.

$\xi_n (n=0,1,2,\cdots)$同分布，$\eta_n (n=0,1,2,\cdots)$同分布，

$E\xi_n = E\eta_n = 0,\ \ D\xi_n = D\eta_n = \sigma^2 \neq 0.$ 设

$$X_n = \xi_n + \eta_n + (-1)^n (\xi_n - \eta_n)$$

则加密序列$\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$是平稳序列.

验证： $X_n = [1+(-1)^n]\xi_n + [1+(-1)^{n+1}]\eta_n$

(1) $EX_n = 0$

$$X_n = [1+(-1)^n]\xi_n + [1+(-1)^{n+1}]\eta_n$$

(2) $$EX_n^2 = DX_n + (EX_n)^2 \quad = DX_n$$

$$= [1+(-1)^n]^2 D\xi_n + [1+(-1)^{n+1}]^2 D\eta_n$$

$$= 4\sigma^2$$

(3) 取τ为任意正整数,

由X_n与$X_{n+\tau}$互相独立, 有

$$E[X_n X_{n+\tau}] = EX_n \cdot EX_{n+\tau} = 0,$$

所以, $\{X_n, n = 0,1,2,\cdots\}$是平稳序列.

四、严平稳过程与广义平稳过程的关系

1.广义平稳过程,不一定是严平稳过程.

广义平稳只是随机过程的特征变量具有平稳性，但其分布函数未必平稳。

2.严平稳过程,(如果二阶矩不存在),不一定是广义平稳过程.

广义平稳定义中要求$E[X^2(t)]$存在且有限，但严平稳过程只是要求任意n个状态的联合分布不随时间推移而改变，其$E[X^2(t)]$可能不存在

推论 存在二阶矩的严平稳过程必定是广义平稳过程.