例5 随机电报信号

电报信号用电流 I 或 $-I$ 给出,任意时刻 t 的电报信号 $X(t)$ 为 I 或 $-I$ 的概率各为 0.5。又以 $N(t)$ 表示[0,t)内信号变化的次数,已知 $\{N(t),\ t\geq 0\}$是一泊松过程,

则$\{X(t),\ t\geq 0\}$是一个平稳过程.

泊松过程的定义

$$P\{N(t+\tau)-N(t)=k\}=\frac{(\lambda\,|\,\tau\,|)^k}{k!}e^{-\lambda|\tau|}$$

$$\lambda>0, k=0,1,2,\cdots$$

验证

(1) $$E[X(t)] = IP\{X(t) = I\} + (-I)P\{X(t) = -I\}$$

$$= \frac{I}{2} - \frac{I}{2} = 0$$

(2) $$E[X(t)X(t+\tau)]$$

$$= I^2 P\{X(t)X(t+\tau) = I^2\}$$

$$+ (-I^2)P\{X(t)X(t+\tau) = -I^2\}$$

$$= I^2 \sum_{n=0}^{+\infty} P\{N(t+\tau) - N(t) = 2n\}$$

$$- I^2 \sum_{n=0}^{+\infty} P\{N(t+\tau) - N(t) = 2n+1\}$$

由泊松过程的定义

$$P\{N(t+\tau)-N(t)=k\}=\frac{(\lambda\,|\,\tau\,|)^k}{k!}e^{-\lambda|\tau|}$$

$$\lambda>0, k=0,1,2,\cdots$$

于是得到

$$E[X(t)X(t+\tau)]$$

$$=I^2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda\,|\,\tau\,|)^{2n}}{(2n)!}e^{-\lambda|\tau|}\quad -I^2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda\,|\,\tau\,|)^{2n+1}}{(2n+1)!}e^{-\lambda|\tau|}$$

$$=I^2e^{-\lambda|\tau|}\{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda\,|\,\tau\,|)^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda\,|\,\tau\,|)^{2n+1}}{(2n+1)!}\}$$

$$=I^2e^{-\lambda|\tau|}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda\,|\,\tau\,|)^{n}}{n!}$$

$$=I^2e^{-\lambda|\tau|}\cdot e^{-\lambda|\tau|}\quad=I^2e^{-2\lambda|\tau|}$$

(3) $E[X^2(t)]=I^2$

所以, $\{X(t),t\geq 0\}$ 是一个平稳过程.

五.两个平稳过程的关系

广义平稳过程通常简称为平稳过程.

定义3　设X(t)和 Y(t) 是两个平稳过程,如果互相关函数 $E[X(t)Y(t+\tau)] = R_{XY}(\tau)$

仅是参数间距τ的函数,则称 X(t)和 Y(t)平稳相关,或称其为联合平稳的. 此时

$$C_{XY}(\tau) = \operatorname{cov}(X(t), Y(t+\tau))$$

$$= E\,[X(t)\,Y(t+\tau)] - E\,[X(t)]\,E\,[Y(t+\tau)]$$

$$= R_{XY}(\tau) - \mu_X \mu_Y$$

定义4 $$\rho_{XY}(\tau)=\frac{C_{XY}(\tau)}{\sqrt{C_X(0)\cdot C_Y(0)}}$$

称为标准互协方差函数.

特别当 $\rho_{XY}(\tau)=0$ 时,称两个平稳过程不相关.

其中 $$C_X(0)=\operatorname{cov}(X(t),X(t))$$

$$=E[X(t)-EX(t)]^2$$

$$=DX(t)=\sigma_X^2$$

$$C_Y(0)=\operatorname{cov}(Y(t),Y(t))$$

$$=E[Y(t)-EY(t)]^2$$

$$=DY(t)=\sigma_Y^2$$

(均为 常数).

第三节 正态平稳过程

一.正态过程

正态随机变量复习:

一维正态随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,概率密度

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty$$

二维正态随机变量 $(X,Y) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho)$

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

n维正态分布 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 概率密度

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det C)^{1/2}} \exp\{-\frac{1}{2}(x-\mu)' C^{-1}(x-\mu)\}$$

其中

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ . \\ . \\ . \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

协方差矩阵 $C = (C_{ij})_{n\times n}$， $C_{ij} = Cov(X_i, X_j)$

定义5 如果随机过程$X(t)$,对任意正整数n,

$\forall t_1, t_2, \cdots, t_n \in T, (X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n))$ 服从正态分布

则称$X(t)$为正态过程,又称高斯(Gauss)过程.

独立正态过程:如果 $\{X(t), t \in T\}$

是正态过程,同时又是独立过程,

则称 $\{X(t), t \in T\}$ 为独立正态过程.

正态序列: 正态过程$\{X(t), t \in T\}$如果T是可列集,

$T = \{t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots\}$, 记 $X(t) = X_t$; 那么,

$\{X_t, t = t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots\}$ 是正态序列.

二. 正态平稳过程

设 $\{X(t), t \in T\}$是正态过程, $X(t)$服从正态分布,则

$\Psi_X^2(t) = E[X^2(t)]$ 必存在,即二阶矩存在.

定义 如果正态过程 $X(t)$又是(广义)平稳过程,则

称$X(t)$为正态平稳过程.

定理二：设$X(t)$是正态过程.

则$X(t)$为严平稳过程 $\Leftrightarrow$ $X(t)$为广义平稳过程.

例1 设正态过程$\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$的均值函数

$\mu_X(t) = 0$, 自相关函数 $R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2 - t_1)$,

试写出过程的一维、二维概率密度函数.

例2 设$X(t)$是正态平稳过程,且$E[X(t)] = \mu_X(t) = 0$,

令 $$Y(t) = \begin{cases} 1, \text{当} X(t) < 0 \\ 0, \text{当} X(t) \geq 0 \end{cases}$$

证明 $Y(t)$是平稳过程.

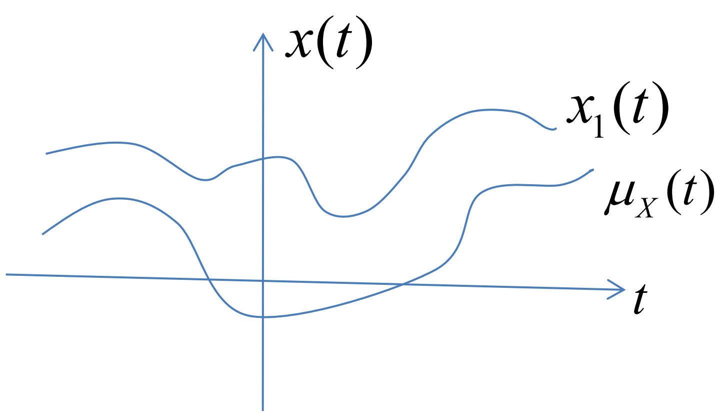
补充1. 随机过程X(t)的自相关函数

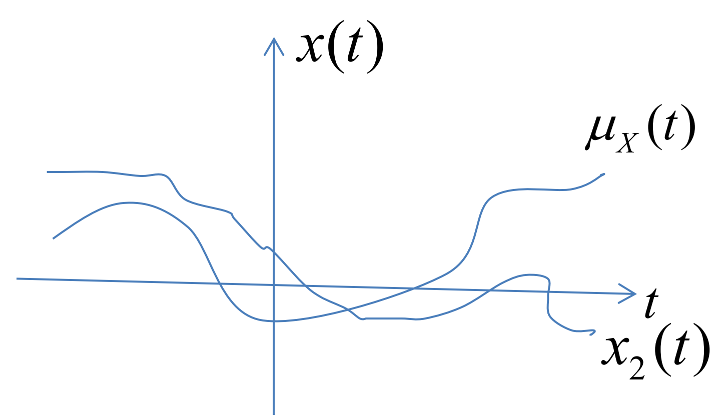
对任意两个状态$X(t_1)$和$X(t_2)$，其相关系数为

$$\rho_X(t_1,t_2)=\frac{Cov[X(t_1),X(t_2)]}{\sqrt{D[X(t_1)]\cdot D[X(t_1)]}}$$

$$=\frac{E[X(t_1)\cdot X(t_2)]-E[X(t_1)]\cdot E[X(t_2)]}{\sqrt{D[X(t_1)]\cdot D[X(t_1)]}}$$

即$E[X(t_1)\cdot X(t_2)]$越大， $X(t_1)$和$X(t_2)$线性相关性越强





补充2. 广义平稳过程的数字特征

定义

设随机过程X(t),对于任意 $t \in T$,满足:

(1) $E[X^2(t)]$存在且有限;

(2) $E[X(t)] = \mu_X$ 是常数;

(3) $E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau)$ 仅依赖于τ ,而与 t无关,

当τ=0时, $E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau)$ 即:

$$E[X^2(t)] = R_X(0) = \Psi_X^2$$ 为与 t无关的常数

从而，$D[X(t)] = E[X^2(t)] - \{E[X(t)]\}^2 = \Psi_X^2 - \mu_X^2$

为与 t无关的常数

$$C_X(t, t+\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] - E[X(t)]E[X(t+\tau)]$$

$$= R_X(t, t+\tau) - \mu_X \cdot \mu_X = R_X(\tau) - \mu_X^2$$